Autoreferat

Anna Nenca

15 czerwca 2020

W swojej pracy naukowej zajmowałam się zorientowanym kolorowaniem zorientowanych grafów. Niezorientowany graf G to para $(V(G), E(G))$, gdzie $V(G)$ oznacza zbiór wierzchołków grafu G, natomiast $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$ oznacza zbiór krawędzi. Zorientowany graf $\overrightarrow{G}$ to para $(V(\overrightarrow{G}), A(\overrightarrow{G}))$, gdzie $V(\overrightarrow{G})$ to zbiór wierzchołków, a $A(\overrightarrow{G}) \subseteq (V(\overrightarrow{G}))^2$ jest zbiorem łuków. Zajmuję się tylko zorientowanymi grafami bez pętli i cykli długości 2. Zorientowane kolorowanie zostało wprowadzone przez B. Courcelle w 1994 roku jako narzędzie do kodowania orientacji grafu przy pomocy etykiet wierzchołków [8]. Mówimy, że zorientowany graf $\overrightarrow{H}$ koloruje graf $\overrightarrow{G}$, jeżeli istnieje homomorfizm z $\overrightarrow{G}$ w $\overrightarrow{H}$, czyli funkcja $c : V(\overrightarrow{G}) \to V(\overrightarrow{H})$, która zachowuje łuki. Wierzchołki grafu $\overrightarrow{H}$ nazywamy wtedy kolorami, a graf $\overrightarrow{H}$ grafem kolorującym. Zorientowana liczba chromatyczna grafu $\overrightarrow{G}$, oznaczana przez $\overrightarrow{\chi}(\overrightarrow{G})$, to najmniejsza liczba wierzchołków w zorientowanym grafie $\overrightarrow{H}$, takim, że istnieje homomorfizm z $\overrightarrow{G}$ w $\overrightarrow{H}$. Zorientowana liczba chromatyczna niezorientowanego grafu G, oznaczana przez $\overrightarrow{\chi}(G)$, to maksymalna zorientowana liczba chromatyczna po wszystkich orientacjach $\overrightarrow{G}$ grafu G, czyli po wszystkich zorientowanych grafach, które powstały z G przez nadanie każdej krawędzi zwrotu. Zorientowane kolorowanie było rozważane dla różnych klas grafów: grafów planarnych [27, 28, 42, 49], grafów zewnętrznie planarnych [16, 40, 48, 49], grafów z ograniczonym stopniem [1, 14, 26, 29, 48, 51, 54], k-drzew [48], grafów Halina [15, 23] i innych.

Ze zorientowanym kolorowaniem jest ściśle powiązane oznakowane kolorowanie. Oznakowany graf (ang. signed graph) to para (G, σ), gdzie $G = (V(G), E(G))$ jest nieskierowanym grafem, a $\sigma : E(G) \to \{+, -\}$ to funkcja przyporządkowująca każdej krawędzi znak "$+$" lub "$-$". Dwa oznakowane grafy są równoważne, jeśli jeden z nich może być zamieniony w drugi za pomocą ciągu operacji zmiany znaków. Pojedyncza operacja zmiany znaków, dla wybranego wierzchołka $v \in V(G)$, zamienia znaki wszytkich krawędzi incydentnych z v. Poprzez $[G, \sigma]$ będziemy oznaczać klasę równoważności grafu oznakowanego (G, σ). Każdy element klasy $[G, \sigma]$ nazywamy reprezentantem tej klasy. Kolorowanie grafów oznakowanych definiujemy poprzez homomorfizm. Graf oznakowany $[G, \sigma]$ jest kolorowalny za pomocą (G_2, σ_2), jeżeli istnieje reprezentant (G, σ_1) klasy $[G, \sigma]$ i odwzorowanie ϕ

z $V(G)$ w $V(G_2)$ zachowyjące znaki krawędzi. Oznakowana liczba chromatyczna oznakowanego grafu $[G, \sigma]$ to najmniejsza liczba wierzchołków grafu kolorującego graf $[G, \sigma]$. Oznakowana liczba chromatyczna $\chi_s(G)$ grafu G to maksymalna liczba spośród wszystkich oznakowanych liczb chromatycznych wszystkich oznakowanych grafów powstałych na bazie G. Związek pomiędzy oznakowanymi grafami i ich kolorowaniem a klasycznymi problemami zorientowanego kolorowania jest opisany przez Naserasr, Rollovâ, i Sopena w [32]. Kolorowanie grafów oznakowanych oraz ich homomorfizmy było rozważane w ostatnich latach [9, 31, 32, 33, 34, 44, 52, 55]. Autorzy zwracaja szczególną uwagę na grafy planarne oraz ich podklasy takie jak grafy planarne z danym obwodem [39] czy kraty [3, 10]. Niektórzy (patrz Sen [44]) zauważają, że większość wyników dotyczących zorientowanego kolorowania ma podobną "oznakowaną wersję" i może być udowodnione takimi samymi technikami, z niewielkimi modyfikacjami.

W rozprawie zajmuję się zorientowanym kolorowaniem czterech klas grafów: 2-wymiarowych krat, cylindrycznych krat, toroidalnych krat i silnych krat. Dodatkowo rozważam oznakowane kolorowanie 2-wymiarowych krat. 2-wymiarowa krata $G(m, n)$ to iloczyn kartezjański $P_m \square P_n$ dwóch ścieżek o m i n wierzchołkach, iloczyn kartezjański cyklu C_m i ścieżki o n wierzchołkach to krata cylindryczna, natomiast krata toroidalna to iloczyn kartezjański dwóch cykli. Silna krata $G^{\boxtimes}(m, n)$ to silny iloczyn dwóch ścieżek o m i n wierzchołkach.

Rysunek 1: (a) Krata $G(2, 3)$, (b) Silna krata $G^{\boxtimes}(2, 3)$.

1 Grafy kolorujące

Łatwo można zauważyć, że aby wykazać dolne ograniczenia zorientowanej liczby chromatycznej wystarczy rozważać tylko kolorowania, w których graf kolorujący $\overrightarrow{H}$ jest turniejem, czyli orientacją grafu pełnego. Tabela 1 przedstawia liczby nieizomorficznych turniejów do 10 wierzchołków (patrz [20]). Ważnym przykładem grafów kolorujących są turnieje Paleya. Dla dowolnej

liczba wierzchołków	1,2	3	4	5	6	7	8	9	10
liczba turniejów	1	2	4	12	56	456	6880	191536	9733056

Tablica 1: Liczba nieizmorficznych turniejów

liczby pierwszej p, która przystaje do 3 modulo 4, turniej Paleya $\overrightarrow{T}_p$ to graf

o wierzchołkach z ciała $\mathbb{Z}_p$, w którym para (u, v) jest łukiem wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $v - u = r^2$ dla pewnego $\neq 0$.

Oznakowany graf Paleya SP_p, dla $p \equiv 1 \bmod 4$ to graf oznakowany ze zbiorem wierzchołków $V(SP_p) = \mathbb{Z}_p$ oraz znakiem "$-$" na krawędziach $\{u, v\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v - u = r^2$, dla pewnego $r \neq 0$.

2 Dolne ograniczenia

Niech $\mathcal{G}$ oznacza rodzinę wszystkich orientacji 2-wymiarowych krat, a $\mathcal{G}_m$ oznacza rodzinę wszystkich orientacji 2-wymiarowych krat z m wierszami. Fertin, Raspaud oraz Roychowdhury [18] rozważali zorientowane kolorowanie rodziny dwu-wymiarowych zorientowanych krat. W swojej pracy pokazali, że istnieje orientacja kraty $G(4, 5)$, która wymaga 7 kolorów do zorientowanego pokolorowania oraz, że poprzez homomorfizm w turniej Paleya $\overrightarrow{T}_{11}$ można pokolorować dowolną orientację każdej kraty. Na podstawie wielu komputerowych eksperymentów postawili dwie hipotezy:

Hipoteza 1 *Dowolna orientacja dowolnej kraty może być pokolorowana za pomocą siedmiu kolorów.*

Hipoteza 2 *Dowolna orientacja dowolnej kraty może być pokolorowana za pomocą homomorfizmu w turniej Paleya* $\overrightarrow{T}_7$.

Szepietowski i Targan w swojej pracy [53] przedstawili pułapkę dla $\overrightarrow{T}_7$ - orientację kraty $G(5, 35)$, która nie jest kolorowalna przez $\overrightarrow{T}_7$. Pokazali w ten sposób, że Hipoteza 2 jest nieprawdziwa. Krata ta może być jednak pokolorowana poprzez homomorfizm w inny siedmio-wierzchołkowy graf, więc problem, czy Hipoteza 1 jest prawdą ciągle był otwarty.
We wspólnej z Januszem Dybizbańskim pracy [11] pokazaliśmy, że Hipoteza 1 jest nieprawdziwa. Przedstawiliśmy pułapki dla wszystkich 456 nieizomorficznych turniejów z siedmioma kolorami. Co ciekawe, dla wszystkich poza jednym, nazwanym przez nas $\overleftarrow{T}_7$, znaleźliśmy pułapki z 5 wierszami. Dla $\overleftarrow{T}_7$ udało nam się znaleźć pułapkę z 7 wierszami. Podstawowym narzędziem były algorytmy wyznaczające zbiory osiągalnych kolorowań ostatniej kolumny w kracie, oraz rodziny zbiorów osiągalnych kolorowań dla rodziny krat. Dla danej orientacji $\overrightarrow{G}$ kraty $G(m, n)$ i grafu kolorującego $\overrightarrow{H}$, przez $S(\overrightarrow{G}, \overrightarrow{H})$ oznaczamy zbiór osiągalnych kolorowań na ostatniej kolumnie $\overrightarrow{G}$. Przez $\mathcal{S}(\overrightarrow{H})$ oznaczamy rodzinę $\mathcal{S}(\overrightarrow{H}) = \{S(\overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}) : \overrightarrow{G} \in G(m, n), \text{ dla } m, n \geq 1\}$. Analogicznie, dla krat o określonej liczbie wierszy, definiujemy rodzinę $\mathcal{S}_m(\overrightarrow{H}) = \{S(\overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}) : \overrightarrow{G} \in G(m, n), \text{ dla } n \geq 1\}$. Zauważmy, że $\overrightarrow{G}$ nie jest kolorowalna przez $\overrightarrow{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S(\overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}) = \emptyset$, oraz, że graf $\overrightarrow{H}$ koloruje wszystkie kraty z m wierszami wtedy i tylko wtedy, gdy $\emptyset \notin \mathcal{S}_m(\overrightarrow{H})$. Rozmiar rodziny $\mathcal{S}_m(\overrightarrow{H})$ zależy od m i od

grafu kolorującego $\overrightarrow{H}$. Jeżeli $\overrightarrow{H}$ jest turniejem Paleya $\overrightarrow{T}_7$, wtedy rodzina $\mathcal{S}_4(\overrightarrow{T}_7)$ ma tylko 132 elementy i nie zawiera zbioru pustego. Podobnie możliwe było systematyczne przeglądanie rodziny $\mathcal{S}_5(\overrightarrow{T}_7)$, żeby znaleźć zbiór pusty. Dzieje się tak dlatego, że turniej $\overrightarrow{T}_7$ ma dużą grupę automorfizmów. Sytuacja jest inna, gdy turniej kolorujący nie ma dużej grupy symetrii. Na przykład, dla turnieju $\overleftarrow{T}_7$, który powstał z $\overrightarrow{T}_7$ przez odwrócenie jednej strzałki, udało nam się tylko wyznaczyć $\mathcal{S}_3(\overleftarrow{T}_7)$, która ma 980 zbiorów i nie zawiera zbioru pustego. Próby wyznaczenia rodziny $\mathcal{S}_4(\overleftarrow{T}_7)$ nie powiodły się, ponieważ zbiór znajdowanych osiąglanych zbiorów był za duży. W pracy [11] zastosowaliśmy algorytm zachłanny, który znalazł pułapkę dla każdego turnieju na siedmiu kolorach. Pokazalismy w ten sposób, że (Twierdzenie 3.1)

$$\overrightarrow{\chi}(\mathcal{G}) > 7.$$

Ponieważ kraty są podgrafami cylindrycznych krat oraz toroidalnych krat, dolne ogranicznie zorientowanej liczby chromatycznej 2- wymiarowych krat wyznacza także 8 jako dolną granicę zorientowanej liczby chromatycznej rodzin krat cylindrycznych i toroidalnych. Techniki użyte do szukania pułapek dla turniejów 7-wierzchołkowych nie sprawdziły się, kiedy zastosowaliśmy je do grafów kolorujących z 8 wierzchołkami. Próbowaliśmy użycia algorytmów genetycznych. Niestety, mimo licznych prób, nie udało nam się znaleźć pułapek dla wszystkich 6880 nieizomorficznych turniejów ośmiowierzchołkowych. Nie udało nam się także pokazać, że istnieje graf z ośmioma wierzchołkami, który koloruje całą rodzinę dwu-wymiarowych krat.

Niech $\mathcal{G}^{\boxtimes}$ oznacza rodzinę wszystkich orientacji silnych krat, a $\mathcal{G}^{\boxtimes}_m$ oznacza rodzinę wszystkich orientacji silnych krat z m wierszami. Aravind, Narayanan and Subramanian [2] pokazali, że dowolną orientację silnej kraty z dwoma wierszami można pokolorować poprzez homomorfizm w $\overrightarrow{T}_{11}$ oraz, że istnieje orientacja silnej kraty $G^{\boxtimes}(2,5)$, która wymaga 8 kolorów do zorientowanego pokolorowania. Wspólnie z Januszem Dybizbańskim pokazaliśmy, że dla każdego turnieju $\overrightarrow{H}$ z 10 wierzchołkami, istnieje orientacja $\overrightarrow{G}^{\boxtimes}$ silnej kraty z dwoma wierszami z pustym zbiorem osiągalnych kolorowań. Znaleźliśmy pułapki z dwoma wierszami dla wszystkich 9733056 nieizomorficznych turniejów z 10 wierzchołkami, dzięki czemu udało się wyznaczyć dokładną wartość zorientowanej liczby chromatycznej silnych krat z dwoma wierszami (Twierdzenie 6.1):

$$\overrightarrow{\chi}(\mathcal{G}^{\boxtimes}_2) = 11,$$

oraz poprawić dolne oszacowanie zorientowanej liczby chromatycznej dla wszystkich silnych krat:

$$\overrightarrow{\chi}(\mathcal{G}^{\boxtimes}) \geq 11.$$

W pracy [13], wspólnie z Januszem Dybizbańskim i Andrzejem Szepietowskim, rozważamy oznakowaną liczbę chromatyczną krat. Pokazujemy, że istnieje oznakowana krata, dla której nie istnieje oznakowanie kolorowanie

porzez homomorfizm w graf z czterema wierzchołkami. Pokazaliśmy w ten sposób, że dolna granica oznakowanej liczby chromatycznej krat wynosi 5. Dowód ten nie wymaga użycia komputera.

3 Górne ograniczenia

Sopena [50], pokazał, że dowolną orientację dowolnej silnej kraty da się pokolorować przy użyciu 126 kolorów. Kilku autorów wykorzystuje grafy Trompa aby wyznaczyć górne ograniczenie zorientowanej liczby chromatycznej grafów, patrz [14, 37, 38]. Graf Trompa $\overrightarrow{Tr}(\overrightarrow{T}_p)$ składa się z dówch izomorficznych kopii turnieju Paleya z p wierzchołkami oraz dwóch dodatkowych wierzchołków, patrz [38]. Pokazuję, że dowolna orientacja silnej kraty może być pokolorowana przy pomocy grafu Trompa z 88 wierzchołkami. Dowód ten nie wymaga użycia komputera. Poprawiam w ten sposób górne ograniczenia zorientowanej liczby chromatycznej silnych krat (Twierdzenie 7.1):

$$\overrightarrow{\chi}(\mathcal{G}^{\boxtimes}) \leq 88.$$

W podobny sposób wykorzystuję grafy Trompa aby pokazać że dowolna orientacja toroidalnej kraty może być pokolorowana przy pomocy 27 kolorów (Twierdzenie 6.4). Nie wiadomo, czy isnieje graf kolorujący $\overrightarrow{H}$ z 27 kolorami który koloruje wszystkie orientacje toroidalnych krat.

W swoim dowodzie, że istnieje homomorfizm z dowolnej orientacji kraty w turniej Paleya $\overrightarrow{T}_{11}$, Fertin, Raspaud oraz Roychowdhury wykorzystali fakt, że turniej Paleya $\overrightarrow{T}_{11}$ ma pewną własność. W swojej pracy zainteresowałam się, czy istnieją inne własności grafów kolorujących, które mogą być użyte do zorientowanego kolorowania. Ciekawy okazał się graf o dziesięciu wierzchołkach $\overrightarrow{H}_{10}$, który powstał z $\overrightarrow{T}_{11}$ przez usunięcie jednego wierzchołka. Okazało się, że istnieje zbiór $S \subset \{1, \ldots, 10\}^5$ o następującej własności:

(a) każda krata z pięcioma wierszami złożona z jednej kolumny daje się pokolorować ciągiem $s \in S$,

(b) jeżeli krata $\overrightarrow{G}$ o pięciu wierszach i n kolumnach daje się pokolorować tak, że ciąg kolorowań ostatniej kolumny należy do S, to każde rozszerzenie kraty $\overrightarrow{G}$ o jedną kolumnę daje się pokolorować tak, żeby kolorowanie nowej kolumny należało do S.

Zbiór S będzę nazywać zbiorem domkniętym na rozszerzenia. Za pomocą komputera wyznaczyłam zbiór S dla krat o 6, 7, lub ośmiu wierszach. Udało się w ten sposób poprawić górne oszacowanie zorientowanej liczby chromatycznej 2-wymiarowych krat z ośmioma wierszami (Twierdzenie 4.1):

$$\overrightarrow{\chi}(\mathcal{G}_8) \leq 10.$$

Za pomocą analogicznych pomysłów pokazałam, że:

- każda cylindryczna krata $C_m \Box C_n$, $m < 8$, może być pokolorowana za pomocą grafu $\overrightarrow{H}_{10} = \overrightarrow{T}_{11} - \{0\}$. Granice osiągnięte dla krat cylindrycznych poprawiają także granice dla krat toroidalnych. Otrzymałam więc: $\overrightarrow{\chi}(\mathcal{T}_3) \leq 16$, $\overrightarrow{\chi}(\mathcal{T}_4) \leq 18$, $\overrightarrow{\chi}(\mathcal{T}_5) \leq 20$, $\overrightarrow{\chi}(\mathcal{T}_6) \leq 22$, $\overrightarrow{\chi}(\mathcal{T}_7) \leq 24$;

- każda silna krata z czterema wierszami może być pokolorowana za pomocą grafu promowanego $\overrightarrow{H}_{38} = \overrightarrow{P}(\overrightarrow{T}_{19})$. Graf promowany (ang. push-graph) składa się z dwóch izomorficznych kopii turnieju Paleya $\overrightarrow{T}_p$, patrz [25].

Ponadto pokazuję, że:

- istnieje graf kolorujący z 9 wierzchołkami, który koloruje dowolną zorientowana kratę z pięcioma wierszami,

- każda silna krata z trzema wierszami może być pokolorowana za pomącą turnieju Paleya $\overrightarrow{T}_{19}$. Zaprojektowaliśmy algorytm, który wyznacza zbiory osiągalnych kolorowań na ostatniej kolumnie dowolnej orientacji dowolnej silnej kraty z 3 wierszami, jeśli użyjemy turnieju Paleya $\overrightarrow{T}_{19}$,

- każda oznakowana krata z co najwyżej 7 wierszami może być pokolorowana za pomocą oznakowanego grafu Paleya SP_5.

To jest druga wersja mojej rozprawy. Dodałam:

- Rozdział 6 poświęcony zorientowanej liczbie chromatycznej cylindrycznych i toroidalnych krat,

- Twierdzenie 7.1 dotyczące nowej granicy 88 dla zorientowanej liczby chromatycznej rodziny silnych krat,

- Twierdzenie 7.6 dotyczące nowej granicy 38 dla zorientowanej liczby chromatycznej rodziny silnych krat z cztrema wierszami,

- Rozdział 8 poświęzcony oznakowanemu kolorowaniu krat.

Nowe wyniki zostały opublikowane w [13] lub zostały przyjęte do publikacji [35].

Literatura

[1] N.R. Aravind, C.R. Subramanian, Forbidden subgraph colorings and the oriented chromatic number, *In Proc. 20th International Workshop on Combinatorial Algorithms, IWOCA'09. Lecture Notes in Comput. Sci.* **5874** (2009) 60–71.

[2] N. R. Aravind, N. Narayanan, C.R. Subramanianm Oriented colouring of some graph products, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **31** (2011) 675–686.

[3] J. Bensmail, On the 2-edge-coloured chromatic number of grids, *Australasian Journal of Combinatorics 75* 3 (2019) 365–384.

[4] H. Bielak, The oriented chromatic number of some grids. *Ann. UMCS Inform. AI.* **5** (2006) 5–17.

[5] O.V. Borodin, On acyclic colorings of planar graphs, *Discrete Math.* **25** (1979) 211–236.

[6] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, J. Nešetřil, A. Raspaud, É. Sopena, On the maximum average degree and the oriented chromatic number of a graph, *Discrete Math.* **206** (1999) 77–89.

[7] O.V. Borodin, A.O. Ivanova, A.V. Kostochka, Oriented 5-coloring of sparse plane graphs, *J. Applied and Industrial Math.* **1(1)** (2007) 9–17.

[8] B. Courcelle, The monadic second order logic of graphs VI: On several representations of graphs by relational structurest, *Discrete Appl. Math.* **54** (1994) 117–149.

[9] S. Das, S. Nandi, S. Paul, S. Sen, Chromatic number of signed graphs with bounded maximum degree, arXiv:1603.09557 (2016).

[10] J. Dybizbański, Signified chromatic number of grids is at most 9, arXiv:1909.00371 (2019).

[11] J. Dybizbański, A. Nenca, Oriented chromatic number of grids is greater than 7, *Inform. Process. Lett.* **112(4)** (2012) 113–117.

[12] J. Dybizbański, A. Nenca, Oriented chromatic number of Cartesian products and strong products of paths, *Discussiones Mathematicae Graph Theory.* **39** (2019) 211–223.

[13] J. Dybizbański, A. Nenca, A. Szepietowski, Signed coloring of 2-dimensional grids, *Inform. Process. Lett.* **156** 105918, (2020).

[14] J. Dybizbański, P. Ochem, A. Pinlou, A. Szepietowski, Oriented cliques and colorings of graphs with low maximum degree, *Discrete Math.*, **343**, (2020), 111829.

[15] J. Dybizbański, A. Szepietowski, The oriented chromatic number of Halin graphs, *Inform. Process. Lett.* **114(1-2)** (2014) 45–49.

[16] L. Esperet, P. Ochem, Oriented colorings of 2-outerplanar graphs, *Inform. Proc. Letters* **101** (2007) 215–219.

[17] G. Fertin, E. Godard, A. Raspaud, Acyclic and k-distance coloring of the grid, *Inform. Process. Lett. 87* 1 (2003) 51–58.

[18] G. Fertin, A. Raspaud, A. Roychowdhury, On the oriented chromatic number of grids, *Inform. Process. Lett.* **85(5)** (2003) 261–266.

[19] E. Fried, On homogeneous tournaments, *Combinatorial Theory and its applications* **2** (1970) 467–476.

[20] J. L. Gross, J. Yellen, eds., Handbook of Graph Theory, *CRC Press* (2004) 157, 523.

[21] F. Harary, On the Notion of Balance of a Signed Graph, *Michigan Math J, 2*, doi = 10.1307/mmj/1028989917 (1954).

[22] M. Hosseini Dolama, É. Sopena, On the oriented chromatic number of graphs with given excess, *Discrete Math.* **306** (2006) 1342–1350.

[23] M. Hosseini Dolama, É. Sopena, On the oriented chromatic number of Halin graphs, *Inform. Process. Lett.* **98(6)** (2006) 247–252.

[24] R. E. Jamison, G. L. Matthews, Acyclic colorings of products of cycles, *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications* **54** (2008) 59–76.

[25] W.F. Klostermeyer, G. MacGillivray, Homomorphisms and oriented colorings of equivalence classes of oriented graphs, *Discrete Math.* **274** (2004) 161–172.

[26] A. V. Kostochka, É. Sopena, X. Zhu, Acyclic and oriented chromatic numbers of graphs, *J. Graph Theory* **24(4)** (1997) 331–340.

[27] T. H. Marshall, Homomorphism bounds for oriented planar graphs, *Journal of Graph Theory* **55** (2007) 175–190.

[28] T. H. Marshall, On Oriented Graphs with Certain Extension Properties, *Ars Comb.* **120** (2015) 223–236.

[29] T. H. Marshall, P_{11}-Coloring of Oriented Graphs, *Graphs and Combinatorics* **32** (2016) 2029–2045.

[30] B. D. McKay, A. Piperno, Practical Graph Isomorphism, II, *J. Symbolic Computation* **60** (2013) 94–112.

[31] A. Montejano, P. Ochem, A. Pinlou, A. Raspaud and É. Sopena, Homomorphisms of 2-edge-colored graphs, *Discrete Applied Mathematics 158* 12, (2010), doi = 10.1016/j.dam.2009.09.017, 1365–1379.

[32] R. Naserasr, E. Rollovâ, É. Sopena, Homomorphisms of Signed Graphs, *Journal of Graph Theory 79* (2014) doi = 10.1002/jgt.21817

[33] R. Naserasr, E. Rollovâ, É. Sopena, Homomorphisms of signed bipartite graphs, In: Nešetřil J., Pellegrini M. (eds) The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications. CRM Series, vol 16. Edizioni della Normale, Pisa (2013) 345–350.

[34] R. Naserasr, É. Sopena, T. Zaslavsky, Homomorphisms of signed graphs: An update, arXiv:1909.05982v1, (2019).

[35] A. Nenca, Oriented chromatic number of Cartesian products $P_m \square P_n$ and $C_m \square P_n$, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* In Press.

[36] P. Ochem, Negative results on acyclic improper colorings, *Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. Proc AE* (2005) 357–362.

[37] P. Ochem, A. Pinlou, Oriented Coloring of Triangle-Free Planar Graphs and 2-Outerplanar Graphs, *Graphs and Combinatorics* **30**, (2014) 439–453.

[38] A. Pinlou, An oriented coloring of planar graphs with girth at least five, *Discrete Math.* **309** (2009) 2108–2118.

[39] P. Ochem, A. Pinlou, S. Sen, Homomorphisms of 2-Edge-Colored Triangle–Free Planar Graphs, doi = 10.1002/jgt.22059, *Journal of Graph Theory, Wiley, 85 (1)* (2017) 258–277.

[40] A. Pinlou, É. Sopena, Oriented vertex and arc colorings of outerplanar graphs, *Inform. Proc. Letters* **100(3)** (2006) 97–104.

[41] T. Rapke, Oriented and injective oriented colourings of grid graphs. *JCMCC. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* **89** (2014) 169–196.

[42] A. Raspaud, É. Sopena, Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs, *Inform. Process. Lett.* **51** (1994) 171–174.

[43] Kenneth H. Rosen, Elementary Number Theory and its Application, *Addison Wesley Publishing Company* (2000) 292.

[44] S. Sen, A contribution to the theory of graph homomorphisms and colorings (Ph.D thesis), Bordeaux University (2014).

[45] Joseph H. Silverman A Friendly Introduction to Number Theory *Pearson Education, Inc.* (2012) .

[46] É. Sopena, Homomorphisms and colourings of oriented graphs: An updated survey, *Discrete Math.* **339** (2016) 1993–2005.

[47] É. Sopena, Oriented graph coloring, *Discrete Math.* **229** (2001) 359–369.

[48] É. Sopena, The chromatic number of oriented graphs, *J.Graph Theory* **25** (1997) 191–205.

[49] É. Sopena, There exist oriented planar graphs with oriented chromatic number at least sixteen, *Inform. Process. Lett.* **81(6)** (2002) 309–312.

[50] É. Sopena, Upper oriented chromatic number of undirected graphs and oriented colorings of product graphs, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **32** (2012) 517–583.

[51] É. Sopena, L. Vignal, A note on the oriented chromatic number of graphs with maximum degree three, *Research Report, Bordeaux I University*, (1996).

[52] E. Steffen, A. Vogel, Concepts of signed graph coloring, arXiv:1909.09381, (2019).

[53] A. Szepietowski, M. Targan, A note on the oriented chromatic number of grids, *Inform. Process. Lett.* **92(2)** (2004) 65–70.

[54] D.R. Wood, On the oriented chromatic number of dense graphs, *Contrib. Discrete Math.* **2(2)** (2007) 145–152.

[55] T. Zaslavsky, Signed graphs, *Discrete Appl. Math 4* (1982) 47–74.