Geometryczne własności miar w skończenie wymiarowych układach dynamicznych

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Adam Śpiewak

Poniższa rozprawa składa się z dwóch części. Obie z nich badają geometryczne własności miar występujących w skończenie wymiarowych układach dynamicznych, głównie z punktu widzenia teorii wymiaru.

Część pierwsza dotyczy probabilistycznych aspektów *twierdzenia Takensa o zanurzaniu*, zajmującego się zagadnieniem rekonstrukcji układu dynamicznego z ciągu pomiarów wykonanych za pomocą jednowymiarowej obserwabli. Klasyczne wyniki z tej dziedziny (zob. np. [18, 21]) orzekają, że dla typowej obserwabli, dowolny stan początkowy układu jest jednoznacznie wyznaczony przez ciąg pomiarów, o ile ich ilość przekracza dwukrotnie wymiar przestrzeni fazowej. Główny wynik tej części rozprawy (Twierdzenie 1.2 poniżej) stwierdza, że w kontekście probabilistycznym liczba pomiarów może być dwukrotnie zmniejszona, tzn. *prawie każdy* stan początkowy układu jest wyznaczony jednoznacznie, o ile ilość pomiarów jest większa od wymiaru Hausdorffa przestrzeni fazowej. Powyższy wynik wspiera hipotezy Shroera, Sauera, Otta oraz Yorka z 1998 roku [19] oraz dowodzi [19, Conjecture 1] dla miar ergodycznych (Twierdzenie 1.3). Przedstawiamy także niedynamiczną wersję probabilistycznego twierdzenia o zanurzaniu (Twierdzenie 1.4) oraz szereg przykładów ilustrujących powyższe wyniki. Ta część rozprawy jest w większości oparta o preprint wspólny z Krzysztofem Barańskim oraz Yonatanem Gutmanem [3].

W drugiej części rozprawy rozważamy rodzinę stacjonarnych miar probabilistycznych dla pewnych losowych układów dynamicznych na odcinku jednostkowym oraz badamy ich własności geometryczne. Rozważane miary mogą być traktowane jako miary stacjonarne dla procesu Markowa na odcinku, otrzymanego przez losowe iterowanie dwóch kawałkami afinicznych homeomorfizmów odcinka. Układy tej postaci nazywamy układami *Alsedy–Misiurewicza* (albo AM-układami), ponieważ badania nad nimi rozpoczęli Alsedà oraz Misiurewicz w pracy [2]. Postawili w niej również hipotezę, że typowe miary stacjonarne dla takich układów są singularne względem miary Lebesgue'a. Głównym celem naszej pracy jest scharakteryzowanie parametrów posiadających tę własność. Naszym głównym wynikiem jest znalezienie pewnych zbiorów parametrów dla których odpowiednie miary są singularne, co dowodzi hipotezy dla tych zbiorów. Przedstawiamy dwa różne podejścia do dowodzenia singularności (Twierdzenia 2.1 oraz 2.2). Wyliczamy wymiar Hausdorffa miary stacjonarnej dla pewnych parametrów. Przedstawiamy również kilka dodatkowych wyników dotyczących AM-układów. Ta część rozprawy jest w większości oparta o publikację wspólną z Krzysztofem Barańskim [4].

1 Probabilistyczne twierdzenie Takensa

Wyobraźmy sobie doświadczalnika obserwującego układ fizyczny modelowany przez *układ dynamiczny* z czasem dyskretnym (X, T), gdzie $T : X \to X$ jest odwzorowaniem opisującym ewolucję układu w jednostce czasu, a *przestrzeń fazowa* X jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^N$. Często zdarza się, że dla ustalonego punktu $x \in X$, zamiast ciągu rzeczywistych pomiarów pierwszych k stanów układu $x, Tx, \ldots, T^{k-1}x$, doświadczalnik ma dostęp jedynie do k wartości *pomiarów* $h(x), h(Tx), \ldots, h(T^{k-1}x)$ wykonanych za pomocą jednowymiarowej *obserwabli* $h : X \to \mathbb{R}$. Naturalne jest zatem pytanie, do jakiego stopnia wyjściowy układ (X, T) może być odtworzony na podstawie ciągu takich pomiarów oraz jaka jest najmniejsza liczba k gwarantująca wiarygodną rekonstrukcję. Powyższe pytania pojawiły się w literaturze fizycznej (zob. np. [15, 19]) i zainspirowały szereg wyników matematycznych, znanych jako *twierdzenia typu Takensa o zanurzaniu*. Orzekają one, że odtworzenie układu (X, T) jest możliwe dla pewnych obserwabli h, o ile pomiary $h(x), h(Tx), \ldots, h(T^{k-1}x)$ są znane dla *wszystkich* $x \in X$ oraz wystarczająco dużego k. Matematycznie oznacza to, że tzw. *delay-coordinate map* $X \ni x \mapsto (h(x), h(Tx), \ldots, h(T^{k-1}x)) \in \mathbb{R}^k$ jest różnowartościowe.

Twierdzenia typu Takensa są uznawane za wyniki teoretyczne, które uzasadniają prawidłowość procedur wykorzystywanych w praktyce przez eksperymentalistów (zob. np. [11, 16]). Zostały one udowodnione w kilku kategoriach (np. [18, 21], zob. także [17]). Zauważmy, że nie można oczekiwać wiarygodnej rekonstrukcji układu na podstawie pomiarów wykonanych za pomocą a priori ustalonej obserwabli h, gdyż może ona nie rozróżniać wystarczająco stanów układu (np. gdy h jest stała). Należy zatem zakładać, co wydaje się realistyczne, że doświadczalnik jest w stanie *zaburzać* ustaloną obserwablę. Pierwszym wynikiem otrzymanym w tym kierunku jest słynne twierdzenie Takensa o zanurzaniu dla gładkich odwzorowań na rozmaitościach [21, Theorem 1]. Stwierdza ono, że dla danej C^2-rozmaitości M oraz typowej pary złożonej z C^2-dyfeomorfizmu $T : M \to M$ i C^2-odwzorowania $h : M \to \mathbb{R}$, odpowiadające im odwzorowanie *delay-coordinate map* $\phi : M \to \mathbb{R}^k$, $\phi(x) = (h(x), h(Tx), \ldots, h(T^{k-1}x))$ jest C^2-zanurzeniem (czyli różnowartościową immersją), o ile $k > 2\dim(M)$. Z uwagi na ich silne związki z wykorzystywanymi w praktyce procedurami rekonstrukcji, twierdzenie Takensa spotkało się z zainteresowaniem fizyków matematycznych (zob. np. [18, 19]). Przedstawmy jeszcze rozszerzenie powyższego twierdzenia autorstwa Sauera, Yorka oraz Casdagliego [18]. Jest ono sformułowane w terminach górnego wymiaru pudełkowego $\overline{\dim}_B$ (więcej szczegółów na temat teorii wymiaru można znaleźć np. w [8]), zaś zaburzenie jest wielomianem stopnia $2k$. Poniższe sformułowanie pochodzi z [17].

Twierdzenie 1.1 ([17, Theorem 14.5])**.** *Niech $X \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem zwartym oraz niech $T : X \to X$ będzie lipschitzowskie, różnowartościowe oraz aperiodyczne (tzn. bez punktów okresowych). Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $k > 2\overline{\dim}_B X$. Niech $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ będzie funkcją lipschitzowską, zaś $h_1, \ldots, h_m : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ bazą przestrzeni rzeczywistych wielomianów N zmiennych stopnia co najwyżej $2k$. Dla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ oznaczmy przez $h_\alpha : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ odwzorowanie*

$$h_\alpha(x) = h(x) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j h_j(x).$$

Wówczas dla prawie każdego w sensie miary Lebesgue'a $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, odwzorowanie

$$\phi_\alpha^T : X \to \mathbb{R}^k, \qquad \phi_\alpha^T(x) = (h_\alpha(x), h_\alpha(Tx), \ldots, h_\alpha(T^{k-1}x))$$

jest różnowartościowe na X.

Zauważmy, że Twierdzenie 1.1 można stosować do dowolnego zwartego zbioru $X \subset \mathbb{R}^N$, niekoniecznie będącego rozmaitością. Jest to pożądana własność, gdyż pozwala rozważać zbiory o skomplikowanej geometrii, takie jak fraktalne atraktory występujące w dynamice chaotycznej. Co więcej, górny wymiar pudełkowy X może być mniejszy od wymiaru dowolnej rozmaitości zawierającej X, więc Twierdzenie 1.1 może wymagać mniejszej ilości pomiarów niż jego gładki odpowiednik z [21].

Na ogół doświadczalnik może przeprowadzić tylko skończenie wiele pomiarów $h(x_j), \ldots, h(T^{k-1}x_j)$ dla pewnych punktów $x_j \in X$, $j = 1, \ldots, l$. Wydaje się realistyczne założenie, że istnieje (pośredni lub bezpośredni) proces *losowy* określający które stany początkowe x_j są dostępne w eksperymencie. W poniższej pracy jesteśmy zainteresowani problemem odtwarzana układu w obecności takiego procesu, względem tego procesu. Mówiąc matematycznie, ustalamy miarę probabilistyczną μ na X i badamy czy delay-coordinate map ϕ_α^T jest różnowartościowe *prawie wszędzie* względem μ (tj. czy istnieje podzbiór zbioru X pełnej miary μ, taki że ϕ_α^T jest różnowartościowe na tym podzbiorze). Ponieważ w tej sytuacji możemy pominąć zbiory miary zero, zasadne jest pytanie, czy minimalna liczba pomiarów gwarantująca rekonstrukcję układu może być mniejsza niż $2\dim X$. Nasz główny wynik dowodzi, że tak właśnie jest i liczba pomiarów może być zredukowana dwukrotnie dla *dowolnej* (borelowskiej) miary probabilistycznej. Poniższe twierdzenie jest uproszczoną wersją naszego głównego wyniku. Jest ono sformułowane w terminach *wymiaru Hausdorffa* miary probabilistycznej, zdefiniowanego jako

$$\dim_H(\mu) = \inf\{\dim_H(A) : A \text{ jest borelowski oraz } \mu(A) = 1\},$$

gdzie $\dim_H(A)$ oznacza wymiar Hausdorffa zbioru A.

Twierdzenie 1.2 (**Probabilistyczne twierdzenie Takensa o zanurzaniu**). *Niech $X \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem borelowskim, μ borelowską miarą probabilistyczną na X, zaś $T : X \to X$ odwzorowaniem różnowartościowym, lipschitzowskim oraz aperiodycznym. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ takie, że $k > \dim_H(\mu)$. Niech $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ będzie funkcją lokalnie lipschitzowską oraz niech $h_1, \ldots, h_m : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ będzie bazą przestrzeni rzeczywistych wielomianów N zmiennych stopnia co najwyżej $2k-1$. Dla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ oznaczmy przez $h_\alpha : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ odwzorowanie*

$$h_\alpha(x) = h(x) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j h_j(x).$$

Wówczas dla prawie każdego w sensie miary Lebesgue'a $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, istnieje zbiór borelowski $X_\alpha \subset X$ pełnej miary μ, taki że odwzorowanie delay-coordinate map

$$\phi_\alpha^T : X \to \mathbb{R}^k, \qquad \phi_\alpha^T(x) = (h_\alpha(x), h_\alpha(Tx), \ldots, h_\alpha(T^{k-1}x))$$

jest różnowartościowe na X_α. Jeśli miara μ jest dodatkowo T-niezmiennicza, to zbiory X_α można wybrać tak, aby były T-niezmiennicze, tzn. $T(X_\alpha) \subset X_\alpha$.

Przypomnijmy, że dla dowolnego zbioru borelowskiego X oraz borelowskiej miary probabilistycznej μ na X zachodzi

$$\dim_H(\mu) \leqslant \dim_H X \leqslant \underline{\dim}_B X \leqslant \overline{\dim}_B X. \tag{1}$$

Ponieważ nierówności w (1) mogą być ostre, to wykorzystanie wymiaru Hausdorffa zamiast wymiarów pudełkowych może dodatkowo zmniejszyć liczbę wymaganych pomiarów. Istnieją w szczególności zbiory zwarte $X \subset \mathbb{R}^N$ takie, że $\dim_H X = 0$ oraz $\overline{\dim}_B X = N$, więc Twierdzenie 1.2 może znacząco zmniejszyć liczbę pomiarów w stosunku do Twierdzenia 1.1 (w kontekście probabilistycznym), gdyż wiadomo, że górnego wymiaru pudełkowego nie można zastąpić wymiarem Hausdorffa w Twierdzeniu 1.1.

Skomentujmy teraz znaczenie T-niezmienniczości zbiorów X_α w przypadku gdy zakładamy, że μ jest T-niezmiennicza. Z uwagi na różnowartościowość odwzorowania ϕ_α^T w Twierdzeniu 1.2, naturalne jest rozważanie modelu układu (X, T) zanurzonego $\mathbb{R}^k$, tj. układu dynamicznego o przestrzeni fazowej $\phi_\alpha^T(X_\alpha)$ oraz dynamice $\phi_\alpha^T \circ T \circ (\phi_\alpha^T)^{-1}$. Jednakże, aby $\phi_\alpha^T \circ T \circ (\phi_\alpha^T)^{-1}$ było dobrze określone na $\phi_\alpha^T(X_\alpha)$, zbiór X_α musi być T-niezmienniczy. Nie można tego zagwarantować w ogólności, ale zachodzi to jeśli miara μ jest T-niezmiennicza.

W rozprawie dowodzimy rozszerzonej wersji Twierdzenia 1.2. Założenie $k > \dim(\mu)$ może być osłabione do $\mu \perp \mathcal{H}^k$ (tutaj $\mathcal{H}^k$ oznacza k-wymiarową miarę Hausdorffa), zaś oprócz obserwabli lipschitzowskich h, można rozpatrywać funkcje β-hölderowskie na zbiorach ograniczonych dla odpowiedniego $\beta \in (0, 1]$. Co więcej, twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej borelowskiej miary σ-skończonej μ na X. Założenie o aperiodyczności T nie jest kluczowe w Twierdzeniach 1.1 oraz 1.2 - wystarczy zakładać że zbiory punktów okresowych mają odpowiednio mały wymiar.

Zagadnienie wyznaczania minimalnej liczby pomiarów niezbędnej dla odtwarzania układu było rozważane w literaturze fizycznej. W pracy [15] autorzy przeanalizowali algorytm, który można traktować jak próbę wyznaczenia tej liczby w kontekście probabilistycznym. Nasza praca dostarcza ścisłych wyników w tym kierunku. Co więcej, możliwość dwukrotnego zmniejszenia liczby pomiarów w sytuacji losowej jest przewidziana w hipotezie Shroera, Sauera, Otta oraz Yorka z pracy [19] (towarzyszy jej hipoteza dotycząca tempa zbieżności prawdopodobieństwa błędu do zera). Powyższe hipotezy są przywoływane jako uzasadnienie zmniejszania ilości pomiarów potrzebnych do wiarygodnego zrekonstruowania układu (zob. np. [16]). Pomimo że w tym samym duchu, Twierdzenie 1.2 nie dowodzi formalnie powyższych hipotez, gdyż w [19] autorzy przyjmują inne założenia i kładą inne wymagania na proces rekonstrukcji. W rozprawie wykorzystujemy nasze wyniki, razem z teorią topologicznych miar warunkowych (zob. [20]), aby udowodnić [19, Conjecture 1] dla niezmienniczych miar ergodycznych. Zamiast ścisłych sformułowań powyższych hipotez, prezentujemy wzmocnienie Twierdzenia 1.2, gwaratnujące dodatkowe własności zdefiniowanego prawie wszędzie odwzorowania odwrotnego $(\phi_h^T)^{-1}$ oraz implikujące [19, Conjecture 1] dla miar ergodycznych.

Twierdzenie 1.3. *Załóżmy, że X, μ, $T : X \to X$, $h : X \to \mathbb{R}$ oraz $k \in \mathbb{N}$ spełniają założenia Twierdzenia 1.2. Załóżmy dodatkowo, że X jest zbiorem zwartym. Wówczas dla prawie każdego w sensie miary Lebesgue'a $\alpha \in \mathbb{R}^m$ istnieje zbiór $X_\alpha \subset X$ pełnej miary μ taki, że $\phi = \phi_\alpha^T$ jest różnowartościowe na X_α oraz dla dowolnego $x \in X_\alpha$, ciąg miar warunkowych*

$$\frac{1}{\mu(\phi^{-1}(B(\phi(x),\varepsilon)))}\ \mu \restriction \phi^{-1}(B(\phi(x),\varepsilon))$$

(na zbiorach $\phi^{-1}(B(\phi(x),\varepsilon) = \{y \in X : \|\phi(x) - \phi(y)\| < \varepsilon\}$) zbiega do δ_x w topologii *-słabej gdy $\varepsilon \searrow 0$. W konsekwencji, hipoteza [19, Conjecture 1] zachodzi dla ergodycznych miar niezmienniczych.

Twierdzenia typu Takensa mogą być postrzegane jako dynamiczne wersje *twierdzeń o zanurzaniu*, które orzekają kiedy zbiór skończenie wymiarowy może być zanurzony (tzn. odwzorowany różnowartościowo) w przestrzeń euklidesową. Istotnie, przy założeniach Twierdzenia 1.1, odwzorowanie delay-coordinate map ϕ_α^T jest zanurzeniem zbioru X w $\mathbb{R}^k$ dla typowego α. Twierdzenia o zanurzaniu były intensywnie badane w kilku kategoriach przez wielu autorów ([17] zawiera szczegółowe omówienie). Niedawno, Alberti, Bölcskei, De Lellis, Koliander oraz Riegler [1] udowodnili probabilistyczne twierdzenie o zanurzaniu dla zmodyfikowanego dolnego wymiaru pudełkowego miary. Jesteśmy w stanie wzmocnić ich wynik rozważając wymiar Hausdorffa. Poniżej przedstawiamy uproszczoną wersję naszego wyniku, którą można traktować jako niedynamiczny odpowiednik Twierdzenia 1.2 oraz probabilistyczną wersję twierdzenia Mañégo o liniowych zanurzeniach [13].

Twierdzenie 1.4 (**Probabilistyczne twierdzenie o zanurzaniu**). *Niech $X \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem borelowskim oraz niech μ będzie borelowską miarą probabilistyczną na X. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $k > \dim_H(\mu)$ oraz niech $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ będzie odzworowaniem lipschitzowskim. Wówczas dla prawie każdego w sensie miary Lebesgue'a odwzorowania liniowego $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ istnieje zbiór borelowski $X_L \subset X$ pełnej miary μ, taki że $\phi_L = \phi + L$ jest różnowartościowe na X_L.*

Przedstawiamy również szereg przykładów. Konstruujemy miarę probabilistyczną $\dim_H \mu < \underline{\dim}_{MB}\, \mu$, co pokazuje, że Twierdzenie 1.4 jest wzmocnieniem wcześniejszego wyniku z [1]. Przedstawiamy przykłady pokazujące że w ogólności warunek $k > \dim_H(\mu)$ w Twierdzeniu 1.4 nie może zostać zastąpiony przez $k \geqslant \dim_H(\mu)$ oraz że liniowe zaburzenia obserwabli nie są wystarczające aby uzyskać twierdzenie Takensa. Przykład Kana z [18, Appendix] pokazuje, że warunek $k > 2\dim_H X$ nie jest wystarczający dla istnienia przekształcenia liniowego w $\mathbb{R}^k$, które jest różnowartościowe na X, więc wymiar Hausdorffa nie jest właściwy dla deterministycznego twierdzenia o zanurzaniu. Ponieważ w kontekście probabilistycznym można pracować z wymiarem Hausdorffa, rozważamy zbiór $X \subset \mathbb{R}^2$ podobny do rozpatrywanego przez Kana, który nie może być zanurzony liniowo w $\mathbb{R}$, ale po wyposażeniu w naturalną miarę, prawie każde odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różnowartościowe na zbiorze pełnej miary. Wskazujemy wprost odpowiednie odwzorowania oraz zbiory różnowartościowości.

Przedstawione powyżej wyniki (oraz ich rozszerzenia) są zaprezentowane w Rozdziale 3 rozprawy. Pochodzą z pracy [3] wspólnej z Krzysztofem Barańskim oraz Yonatan Gutmanem, za wyjątkiem Twierdzenia 1.3, które jest częścią pracy w toku z tymi samymi współautorami.

2 Singularne miary stacjonarne dla losowych kawałkami afinicznych homeomorfizmów odcinka

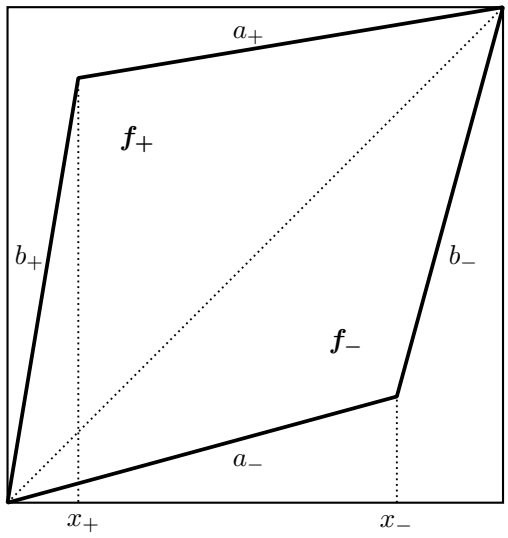
W drugiej części rozprawy badamy rodzinę losowych układów dynamicznych, składających się z par kawałkami afinicznych homeomorfizmów odcinka, które nazywamy *układami Alsedy–Misiurewicza*, lub *AM-układami*. Zostały one wprowadzone i badane przez Alsedę oraz Misiurewicza w pracy [2].

AM-układem nazywamy układ $\{f_-, f_+\}$ składający się z rosnących homeomorfizmów odcinka $[0,1]$ postaci (zob. rysunek z prawej strony)

$$f_-(x) = \begin{cases} a_- x & \text{dla } x \in [0, x_-] \\ 1 - b_-(1-x) & \text{dla } x \in (x_-, 1] \end{cases}$$

$$f_+(x) = \begin{cases} b_+ x, & \text{dla } x \in [0, x_+] \\ 1 - a_+(1-x), & \text{dla } x \in (x_+, 1] \end{cases}$$

gdzie $0 < a_- < 1 < b_-$, $0 < a_+ < 1 < b_+$ oraz $x_- = \frac{b_- - 1}{b_- - a_-}$, $x_+ = \frac{1-a_+}{b_+ - a_+}$.



Traktujemy $\{f_-, f_+\}$ jako układ losowy z zadanymi prawdopodobieństwami p_-, p_+, gdzie $p_\pm > 0$ oraz $p_- + p_+ = 1$. Formalnie oznacza to, że $\{f_-, f_+\}$ definiuje *produkt skośny*

$$\mathcal{F}^+ \colon \Sigma_2^+ \times [0,1] \to \Sigma_2^+ \times [0,1], \qquad \mathcal{F}^+(\underline{i}, x) = (\sigma(\underline{i}), f_{i_0}(x)),$$

gdzie $\underline{i} = (i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zaś σ jest przesunięciem na przestrzeni Σ_2^+ złożonej z nieskończonych, jednostronnych ciągów symboli $\{-,+\}$, z miarą Bernoulliego (produktową) dla wektora (p_-, p_+). Jesteśmy jednak głównie zainteresowani zachowaniem układu na przestrzeni fazowej $[0,1]$ i badaniem rozkładu trajektorii punktu $x \in [0,1]$ przy iteracjach $\{f_-, f_+\}$, tj. $\{f_{i_n} \circ \cdots \circ f_{i_1}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dla $i_1, i_2, \ldots \in \{-,+\}$.

Zauważmy, że na przedziałach $(0, \min(x_-, x_+))$ oraz $(\max(x_-, x_+), 1)$, układ $\{f_-, f_+\}$ jest równoważny (po logarytmicznej zmianie współrzędnych), odpowiednio, dwóm (na ogół różnym i niesymetrycznym) jednowymiarowym spacerom losowym, sklejonym w ciągły sposób. To sprawia, że powyższe układy są interesujące z probabilistycznego punktu widzenia i sądzimy, że mogą służyć jako modele dla wielu zachowań stochastycznych występujących w losowej dynamice jednowymiarowej.

Zachowanie AM-układu zależy od wartości *brzegowych wykładników Lyapunova*, tj.

$$\Lambda(0) = p_- \ln f_-'(0) + p_+ \ln f_+'(0), \qquad \Lambda(1) = p_- \ln f_-'(1) + p_+ \ln f_+'(1).$$

Dla przykładu, jeśli $\Lambda(0)$, $\Lambda(1)$ są ujemne, to końce odcinka $[0,1]$ są przyciągające w średniej, więc typowa trajektoria zbiega do jednego z nich, co może powodować istnienie *wymieszanych (intermingled) basenów przyciągania* dla produktu skośnego $\mathcal{F}^+$ (zob. np. [9]). W tej rozprawie zakładamy, że $\Lambda(0), \Lambda(1)$ są dodatnie. Wówczas dla prawie każdego ciągu $\underline{i} = (i_n)_n \in \Sigma_2^+$, dowolne dwie trajektorie $\underline{i}$ zbiegają do siebie, czyli $|f_{i_n} \circ \cdots \circ f_{i_1}(x) - f_{i_n} \circ \cdots \circ f_{i_1}(y)| \to 0$ gdy $n \to \infty$ dla $x, y \in (0,1)$. Powyższy fenomen jest nazywany *synchronizacją*. Głównym obiektem naszych zainteresowań są *miary stacjonarne* dla powyższych układów, tj. borelowskie miary probabilistyczne ϑ na $[0,1]$ spełniające

$$\vartheta(A) = p_- \vartheta(f_-^{-1}(A)) + p_+ \vartheta(f_+^{-1}(A)) \text{ dla dowolnego zbioru borelowskiego } A \subset [0,1].$$

W języku probabilistycznym, są to rozkłady stacjonarne dla procesu Markowa na odcinku jednostkowym, powstającym przez iterowanie odwzorowań f_- oraz f_+ wybieranych losowo zgodnie z wektorem losowym (p_-, p_+), w sposób niezależny od poprzednich kroków. Miary punktowe δ_0 oraz δ_1 we wspólnych punktach stałych 0 oraz 1 są miarami stacjonarnymi. Okazuje się, że jeżeli oba wykładniki $\Lambda(0)$ oraz $\Lambda(1)$ są ściśle dodatnie, to istnieje jedyna miara stacjonarna μ na $[0,1]$ taka, że $\mu(\{0,1\}) = 0$ (zob. [9]). W pozostałej części tekstu, μ będzie zawsze oznaczać powyższą jedyną miarę stacjonarną bez atomów w końcach odcinka (zauważmy, że nie uwzględniamy w notacji zależności μ od parametrów). W rozprawie badamy własności miar μ, które nazywamy *miarami stacjonarnymi dla AM-układów*. Miara μ jest zawsze albo singularna albo absolutnie ciągła

względem miary Lebesgue'a i naszym głównym celem jest określenie, który przypadek zachodzi w zależności od parametrów $a_-, a_+, b_-, b_+, p_-, p_+$.

W pracy [2], Alsedà oraz Misiurewicz wykorzystali własności miary μ do badania produktu skośnego stowarzyszonego z danym układem. W ramach swoich badań pokazali, że dla pewnych parametrów, miara stacjonarna μ dla AM-układu jest równa mierze Lebesgue'a oraz postawili hipotezę, że μ jest singularna dla typowych parametrów. W rozprawie charakteryzujemy parametry dla których miara stacjonarna jest równa mierze Lebesgue'a. Naszym głównym wynikiem jest potwierdzenie hipotezy dla pewnych zbiorów parametrów. Skupiamy się na przypadku *symetrycznym*, tzn. zakładamy $a_- = a_+$ oraz $b_- = b_+$. Używamy dwóch różnych strategii wykazywania singularności. Pierwsza z nich dotyczy układów posiadających *rezonans*, tzn. spełniających $\ln f'_+(0)/\ln f'_-(0) = \ln f'_+(1)/\ln f'_-(1) \in \mathbb{Q}$. Pokazujemy, że dla pewnych parametrów rezonansowych, miara μ jest singularna oraz skupiona na *minimalnym zbiorze wyjątkowym (exceptional)*, który jest zbiorem Cantora o wymiarze mniejszym od 1. Dokładniej, dowodzimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1. *Niech $\{f_-, f_+\}$ będzie AM-układem. Załóżmy, że*

1. $\Lambda(0) > 0$ *oraz* $\Lambda(1) > 0$,
2. $\{f_-, f_+\}$ *jest symetryczny, czyli* $a_- = a_+ = a \in (0,1)$ *oraz* $b_- = b_+ = b \in (1,\infty)$,
3. $\{f_-, f_+\}$ *posiada* $(k:l)$*-rezonans dla pewnych względnie pierwszych* $k, l \in \mathbb{N}$, $k > l$, *tj.*
$$\ln f'_+(0)/\ln f'_-(0) = \ln f'_+(1)/\ln f'_-(1) = -\frac{k}{l},$$
4. *Zachodzi nierówność* $\rho < \eta$, *gdzie*
$$\rho = (f'_-(0))^{1/l} = (f'_+(0))^{-1/k} = (f'_+(1))^{1/l} = (f'_-(1))^{-1/k},$$
zaś $\eta \in (1/2, 1)$ *jest jedynym rozwiązaniem równania* $\eta^{k+l} - 2\eta^{k+1} + 2\eta - 1 = 0$.

Wówczas jedyna miara stacjonarna μ (bez atomów w $0, 1$) jest singularna oraz
$$\dim_H(\operatorname{supp}\mu) = \frac{\log\eta}{\log\rho} < 1,$$
gdzie $\operatorname{supp}\mu$ *oznacza nośnik topologiczny μ. Co więcej,* $\operatorname{supp}\mu$ *jest nigdziegęstym zbiorem doskonałym.*

Podajemy również dynamiczną charakteryzację zbioru $\operatorname{supp}(\mu)$ oraz opisujemy jego strukturę geometryczną jako przeliczalną sumę rozłącznych zbiorów samopodobnych (self-similar). Okazuje się, że należy rozpatrywać osobno dwa przypadki, w zależności od wartości parametru rezonansowego $\ln f'_+(0)/\ln f'_-(0)$. W przypadku $\ln f'_+(0)/\ln f'_-(0) \in \mathbb{Z}$ (czyli $l = 1$ w Twierdzeniu 2.1), zbiory samopodobne składające się na $\operatorname{supp}(\mu)$ są atraktorami skończonych iterowanych układów funkcyjnych, zaś w przypadku $\ln f'_+(0)/\ln f'_-(0) \notin \mathbb{Z}$ (czyli $l > 1$), odpowiednie zbiory samopodobne są atraktorami nieskończonych iterowanych układów funkcyjnych, a dynamika na $\operatorname{supp}(\mu)$ jest dużo bardziej skomplikowana. W obu przypadkach dowód jest oparty na bezpośredniej konstrukcji zbiorów minimalnych oraz badaniu ich kombinatoryki. W przypadku $\ln f'_+(0)/\ln f'_-(0) \in \mathbb{Z}$ jesteśmy w stanie wyliczyć wymiar Hausdorffa μ. Dodatkowo, przedstawiamy ciekawy przykład AM-układu posiadającego rezonans, z singularną miarą stacjonarną o wymiarze Hausdorffa mniejszym od 1 i nośniku topologicznym równym $[0, 1]$. Pokazujemy także, że rozważane układy o tym samym typie rezonansu są topologicznie sprzężone.

Drugie podejście pozwala nam rozważać także przypadki nierezonansowe. Poniższe twierdzenie jest drugim głównym wynikiem tej części rozprawy.

Twierdzenie 2.2. *Istnieje niepusty i otwarty zbiór parametrów $(a, b) \in (0,1) \times (1,\infty)$ takich, że miara stacjonarna μ dla symetrycznego AM-układu o parametrach $a_- = a_+ = a$ and $b_- = b_+ = b$ z wektorem probabilistycznym $(p_-, p_+) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ jest singularna oraz* $\dim_H(\mu) < 1$.

Dowód jest oparty na nierówności (zob. [12, Theorem 1])

$$\dim_H(\mu) \leqslant -\frac{H((p_-,p_+))}{\chi(\mu)},$$

gdzie $H((p_-,p_+)) := -p_- \log p_- - p_+ \log p_+$ jest entropią wektora probabilistycznego (p_-,p_+), zaś $\chi(\mu) := \int\limits_{[0,1]} (p_- \log f'_-(x) + p_+ \log f'_+(x))d\mu(x)$ jest wykładnikiem Lyapunova miary stacjonarnej μ. W celu udowodnienia $-\frac{H((p_-,p_+))}{\chi(\mu)} < 1$, szacujemy wykładnik Lyapunova $\chi(\mu)$ poprzez szacowanie oczekiwanego czas powrotu do przedziału $[x_-,x_+]$ oraz zastosowanie lematu Kaca. Warto podkreślić, że podejście wykorzystane w dowodzie Twierdzenia 2.1 nie może być użyte do wykazania singularności w przypadku nierezonansowym, gdyż wówczas $\mathrm{supp}(\mu) = [0,1]$.

Określanie czy miara stacjonarna jest absolutnie ciągła bądź singularna jest znanym zagadnieniem, w szczególności w kontekście grup gładkich dyfeomorfizmów działających na okręgu (zob. np. [14, Question 18]). Wspomnijmy tutaj tylko prace [6, 10] w kierunku hipotezy Y. Guivarc'ha, V. Kaimanovicha oraz F. Ledrappiera (zob. [6, Conjecture 1.21]) przewidującej, że dla skończenie generowanej podgrupy $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ działającej w gładki sposób na okręgu, miara stacjonarna jest singularna. Innym przykładem tego typu badań są prace poświęcone *splotom Bernoulliego*, czyli miarom stacjonarnym dla układu $\{f_1,f_2\}$ na odcinku $[0,1]$, zadanego przez $f_1(x) = \lambda x$, $f_2(x) = \lambda x + 1 - \lambda$ dla $\lambda \in (0,1)$. Wiadomo, że parametry $\lambda > 1/2$ dla których odpowiadająca miara jest singularna tworzą zbiór wymiaru Hausdorffa zero, zaś jedynymi znanymi "singularnymi" parametrami są odwrotności liczb Pisot. Długoletnim problemem otwartym jest pytanie, czy są to jedyne przykłady singularnych splotów Bernoulliego. Pomimo bardzo prostej postaci układu i wielu wyników w tym kierunku, pełna odpowiedź wciąż nie jest znana i inspiruje aktywne badania w tej dziedzinie (zob. np. [22] dla wyczerpującego przeglądu zagadnienia). W ostatnim czasie, rosnące zainteresowanie dynamiką losową doprowadziło do intensywnych badań nad układami losowymi zadanymi przez grupy lub półgrupy jednowymiarowych odwzorowań niegładkich, na przykład homeomorfizmów okręgu lub odcinka (zob. np. [2, 5, 9]).

Inne podejście do wykazywania typowej singularności miar stacjonarnych dla układów na odcinku z dodatnimi brzegowymi wykładnikami Lyapunova zostało obrane w niedawnej pracy [5]. Autorzy rozpatrują dużo ogólniejsza rodzinę układów, złożoną ze wszystkich układów $\{f_1,...,f_m\}$ (wraz z wektorami probabilistycznymi $(p_1,...,p_m)$) składających się z zachowujących orientację homeomorfizmów odcinka będących klasy C^1 w otoczeniach punktów końcowych, spełniających $\Lambda(0),\ \Lambda(1) > 0$ oraz takich, że dla dowolnego $x \in (0,1)$ istnieją $i,j \in \{1,...,m\}$ spełniające $f_i(x) < x < f_j(x)$. Dowodzą, że dla typowego w sensie topologicznym układu z powyższej rodziny, odpowiadająca miara stacjonarna jest singularna. Nie implikuje to jednak typowej singularności dla AM-układów, gdyż tworzą one zbiór pierwszej kategorii w tej rodzinie.

Zgodnie z naszą wiedzą, Twierdzenia 2.1 oraz 2.2 są pierwszymi podanymi wprost przykładami bezatomowych stacjonarnych miar singularnych dla nierozszerzających układów losowych generowanych przez kawałkami afiniczne homeomorfizmy okręgu tego typu (zauważmy, że AM-układ może być traktowany jako para homeomorfizmów okręgów z jednym wspólnym punktem stałym). Fakt że powyższe odwzorowania są kawałkami afiniczne jest ciekawy, ponieważ układy tego typu są intensywnie badane oraz stanowią model dla gładkich odwzorowań (zob. np. [14, Questions 12 and 16]).

Zauważmy, że we wspomnianym powyżej przypadku rezonansowym, nośnik miary stacjonarna jest minimalnym zbiorem wyjątkowym (czyli niezmienniczym zbiorem Cantora na którym układ jest minimalny), podczas gdy w przypadku nierezonansowym, nośnik jest równy pełnemu odcinkowi $[0,1]$. Własności minimalnych zbiorów wyjątkowych są klasycznym przedmiotem badań, szczególnie w kontekście grup dyfeomorfizmów, zob. np. [7]. Nasza praca bada ich własności dla układów kawałkami afinicznych.

Przedstawione powyżej wyniki (oraz ich rozszerzenia) są zaprezentowane w Rozdziale 4 rozprawy. Pochodzą z publikacji [4] wspólnej z Krzysztofem Barańskim, za wyjątkiem Twierdzenia 2.2, które jest częścią pracy w toku z tym samym współautorem.

Literatura

[1] G. Alberti, H. Bölcskei, C. De Lellis, G. Koliander, and E. Riegler. Lossless analog compression. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 65(11):7480–7513, 2019.

[2] L. Alsedà and M. Misiurewicz. Random interval homeomorphisms. *Publ. Mat.*, 58(suppl.):15–36, 2014.

[3] K. Barański, Y. Gutman, and A. Śpiewak. A probabilistic Takens theorem. *Submitted. Preprint https://arxiv.org/abs/1811.05959*, 2019.

[4] K. Barański and A. Śpiewak. Singular stationary measures for random piecewise affine interval homeomorphisms. *J. Dyn. Diff. Equat.*, 2019.

[5] W. Czernous and T. Szarek. Generic invariant measures for iterated systems of interval homeomorphisms. *Preprint https://arxiv.org/abs/1906.00096*, 2019.

[6] B. Deroin, V. Kleptsyn, and A. Navas. On the question of ergodicity for minimal group actions on the circle. *Mosc. Math. J.*, 9(2):263–303, back matter, 2009.

[7] B. Deroin, V. Kleptsyn, and A. Navas. On the ergodic theory of free group actions by real-analytic circle diffeomorphisms. *Invent. Math.*, 212(3):731–779, 2018.

[8] K. Falconer. *Fractal geometry.* John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, third edition, 2014. Mathematical foundations and applications.

[9] M. Gharaei and A. J. Homburg. Random interval diffeomorphisms. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 10(2):241–272, 2017.

[10] Y. Guivarc'h and Y. Le Jan. Sur l'enroulement du flot géodésique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 311(10):645–648, 1990.

[11] C.-H. Hsieh, S. M. Glaser, A. J. Lucas, and G. Sugihara. Distinguishing random environmental fluctuations from ecological catastrophes for the North Pacific Ocean. *Nature*, 435(7040):336–340, 2005.

[12] J. Jaroszewska and M. Rams. On the Hausdorff dimension of invariant measures of weakly contracting on average measurable IFS. *J. Stat. Phys.*, 132(5):907–919, 2008.

[13] R. Mañé. On the dimension of the compact invariant sets of certain nonlinear maps. In *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980 (Coventry, 1979/1980)*, volume 898 of *Lecture Notes in Math.*, pages 230–242. Springer, Berlin-New York, 1981.

[14] A. Navas. Group actions on 1-manifolds: a list of very concrete open questions. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. III. Invited lectures*, pages 2035–2062. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018.

[15] N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, and R. S. Shaw. Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.*, 45:712–716, Sep 1980.

[16] M. L. V. Quyen, J. Martinerie, C. Adam, and F. J. Varela. Nonlinear analyses of interictal EEG map the brain interdependences in human focal epilepsy. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 127(3):250 – 266, 1999.

[17] J. C. Robinson. *Dimensions, embeddings, and attractors*, volume 186 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[18] T. Sauer, J. A. Yorke, and M. Casdagli. Embedology. *J. Statist. Phys.*, 65(3-4):579–616, 1991.

[19] C. G. Schroer, T. Sauer, E. Ott, and J. A. Yorke. Predicting chaos most of the time from embeddings with self-intersections. *Phys. Rev. Lett.*, 80:1410–1413, Feb 1998.

[20] D. Simmons. Conditional measures and conditional expectation; Rohlin's disintegration theorem. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 32(7):2565–2582, 2012.

[21] F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980*, volume 898 of *Lecture Notes in Math.*, pages 366–381. Springer, Berlin-New York, 1981.

[22] P. P. Varjú. Recent progress on Bernoulli convolutions. In *European Congress of Mathematics*, pages 847–867. Eur. Math. Soc., Zürich, 2018.