# Nierówności martyngałowe wynikające ze słabej dominacji

Adam Osękowski

26th October 2004

Autoreferat

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a $(\mathcal{F}_n)$ pewną dyskretną filtracją. Niech $(N_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie martyngałem adaptowanym do tej filtracji, a $(e_n)$ będzie ciągiem jego różnic, tzn. niech

$$e_0 = 0 \text{ p.n.}, \, e_n = N_n - N_{n-1}, \text{ p.n.}, \, n \geq 1.$$

Pierwszym głębokim wynikiem z teorii martyngałów jest tzw. nierówność maksymalna, udowodniona przez J. L. Dooba. Mówi ona, iż dla każdego $t > 0$ mamy

$$\mathbb{P}(N^* \geq t) \leq \frac{\sup_n \mathbb{E}|N_n|}{t},$$

gdzie $N^*$ oznacza funkcję maksymalną martyngału $(N_n)$, tzn. $N^* = \sup_n |N_n|$. Jako bezpośredni wniosek z nieco silniejszej wersji tego faktu Doob otrzymał nierówność między $p$-tymi momentami martyngału i jego funkcji maksymalnej:

$$(\mathbb{E}(N^*)^p)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} (\sup_n \mathbb{E}|N_n|^p)^{1/p}, \, 1 < p < \infty,$$

co więcej, stała $\frac{p}{p-1}$ jest optymalna.

W latach sześćdziesiątych D. L. Burkholder rozpoczął badanie nierówności martyngałowych, w szczególności porównywał momenty martyngału z momentami nawiasu kwadratowego, skośnego nawiasu kwadratowego oraz momentami transformaty martyngałowej. Definicja tych obiektów jest następująca. Jeśli $(N_n)$ jest martyngałem o ciągu różnic $(e_n)$, to jego nawias kwadratowy (funkcję kwadratową) $(S_n(N))$ definiujemy wzorem

$$S_n(N) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |e_k|^2}, \, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

natomiast skośny nawias kwadratowy $(s_n(N))$ określamy nastąpująco:

$$s_n(N) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(|e_k|^2|\mathcal{F}_{k-1})},\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Ponadto, $v$-transformatą martyngału $(N_n)$ nazywamy $\mathcal{F}_n$-martyngał $(M_n)$ dany wzorem

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} v_k e_k,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdzie $(v_n)$ jest prognozowalnym ciągiem zmiennych losowych, tzn. $v_0$ jest stała p.n., a dla dowolnego $n \geq 1$ zmienna $v_n$ jest $\mathcal{F}_{n-1}$-mierzalna.

Burkholder założył dodatkowo, iż $|v_k| \leq 1$ dla $k \geq 0$ i udowodnił, że dla $1 < p < \infty$ ([5]) zachodzi nierówność

$$(\mathbb{E}|M_n|^p)^{1/p} \leq (p^* - 1)(\mathbb{E}|N_n|^p)^{1/p},\ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

gdzie $p^* = \max\{p, \frac{p}{p-1}\}$ (takie nierówności będziemy nazywać nierównościami silnego typu). Udowodnił on także, iż dla $p = 1$ nie da się porównać tych wielkości, ale za to wykazał, iż zachodzi nieco słabszy fakt, mianowicie, iż transformata jest operatorem słabego typu $(1, 1)$, tzn. dla każdego $t > 0$ ma miejsce nierówność

$$t\mathbb{P}(|M_n| \geq t) \leq 2\mathbb{E}|N_n|,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

(takie nierówności będziemy nazywali nierównościami słabego typu). Uzyskał także analogiczne nierówności dla nawiasu kwadratowego oraz skośnego nawiasu kwadratowego.

W latach osiemdziesiątych Burkholder zauważył, iż wszystkie jego wyniki (które do tej pory dotyczyły jednego martyngału) dają się rozszerzyć na przypadek dwóch martyngałów $(M_n)$, $(N_n)$, adaptowanych do tej samej filtracji $(\mathcal{F}_n)$, jeśli tylko o ciągach różnic $(d_n)$, $(e_n)$ założyć, iż spełniają warunek $|d_n| \leq |e_n|$ p.n. dla każdego $n \geq 0$ (są to tzw. martyngały podporządkowane, czasem mówi się, że martyngał $(N_n)$ silnie dominuje martyngał $(M_n)$). Ściślej, udowodnił, iż dla takich martyngałów zachodzą nierówności (1) i (2), co więcej, okazuje się, że stałe $p^* - 1$ oraz $2$ są optymalne. Dość łatwo uogólnia się je do nierówności dla całek stochastycznych. Warto też dodać, iż Burkholder rozszerzył większość swoich nierówności na przypadek martyngałów o wartościach w przestrzeniach Hilberta, co pozwoliło, dzięki prostemu pomysłowi, uzyskać inny dowód nierówności między momentami martyngału i jego funkcji kwadratowej, sprowadzając ją do nierówności między momentami martyngałów silnie dominowanych.

Jak później zauważono, z cyklu prac Burkholdera wyłania się pewna bardzo ogólna metoda dowodzenia nierówności dotyczących martyngałów $(M_n)$, $(N_n)$

takich, że $(N_n)$ w pewien sposób „dominuje” $(M_n)$ (przykład martyngałów podporządkowanych pokazuje, skąd bierze się słowo „dominacja”). Przykładami innych rodzajów dominacji są np. styczność martyngałów (dla każdego $n \geq 1$ rozkłady zmiennych $d_n$, $e_n$ pod warunkiem $\mathcal{F}_{n-1}$ pokrywają się), styczność i warunkowa niezależność (martyngały $(M_n)$ i $(N_n)$ są styczne, a ponadto dla $n \geq 1$ rozkłady $d_n$, $e_n$ pod warunkiem $\mathcal{F}_{n-1}$ są niezależne), dominacja w sensie wariancji martyngałów gaussowskich (definicja niżej) i in.. Metoda Burkholdera polega na skonstruowaniu pewnej funkcji dwóch zmiennych, posiadającej pewne specjalne własności.

W pracy zajmujemy się $(\mathcal{F}_n)$-martyngałami $(M_n)$, $(N_n)$ o wartościach w przestrzeniach Hilberta $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, przyjmującymi prawie na pewno wartości w pewnych ośrodkowych podprzestrzeniach. Ponadto przyjmujemy, że $M_0 = 0$ p.n., $N_0 = 0$ p.n.. Rozważamy następujący typ dominacji.

**Definicja 1.** *Powiemy, że martyngał $(N_n)$ słabo (wypukle) dominuje martyngał $(M_n)$, jeśli dla dowolnej niemalejącej funkcji wypukłej $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ i $n \geq 1$ zachodzi nierówność*

$$\mathbb{E}(\phi(|d_n|)|\mathcal{F}_{n-1}) \leq \mathbb{E}(\phi(|e_n|)|\mathcal{F}_{n-1}) \text{ p.n..}$$

Jak łatwo zauważyć, pojęcie słabej dominacji jest uogólnieniem silnej dominacji oraz styczności martyngałów. Warto tu podać pewien przykład.

**Definicja 2.** *Niech $(\mathcal{G}_n)$ będzie taką filtracją, że dla $n \geq 1$ zachodzi warunek $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$, a $(N_n)$ będzie $\mathcal{F}_n$-martyngałem. Definiujemy uśredniony martyngał $(N_n^{\mathcal{G}})$ zadając ciąg $(d_n)$ jego różnic wzorem $d_0 = 0$ p.n. oraz $d_n = \mathbb{E}(e_n|\mathcal{G}_n)$ p.n.*

Dość łatwo sprawdzić, że martyngał $(N_n^{\mathcal{G}})$ jest słabo dominowany przez $(N_n)$. Wszystkie otrzymane wyniki będą się więc stosować w tym przypadku.

W pracy badamy za pomocą metody Burkholdera nierówności słabego i silnego typu dla martyngałów $(M_n)$, $(N_n)$ j.w.; dowodzimy, że dla każdego $t > 0$ zachodzi nierówność

$$t\mathbb{P}(M^* \geq t) \leq 2\sqrt{2}\sup_n \mathbb{E}|N_n|.$$

Jest to nowy wynik, nierówność ta nie była znana z żadną stałą $C$. Pokazujemy także, że optymalna stała w powyższej nierówności jest nie mniejsza niż $1 + \sqrt{2}$. Ponadto wykazujemy, że dla $(M_n)$, $(N_n)$ jak wyżej, $1 < p < \infty$, ma miejsce nierówność

$$(\mathbb{E}|M_n|^p)^{1/p} \leq C_p(\mathbb{E}|N_n|^p)^{1/p}, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdzie $C_p$ jest pewną stałą, $C_p < 1.48p$ dla $p \geq 2$ oraz $C_p < \frac{3}{p-1}$ dla $1 < p < 2$. Nierówności tego typu były już znane, otrzymano je jednak innymi metodami i uzyskane optymalne stałe $C_p$ przy $p \to \infty$ w najlepszym przypadku były rzędu $p^2$ (patrz [23]). Z drugiej strony, na mocy wyników Burkholdera, optymalne stałe w tych nierównościach szacują się z dołu przez $p^* - 1$.

Dalej uogólniamy otrzymaną nierówność między $p$-tymi momentami na nierówność między normami Orlicza słabo dominowanych martyngałów. Pokazujemy, że dla martyngałów $(M_n)$, $(N_n)$ jak wyżej oraz rosnącej funkcji wypukłej $\Phi$ spełniającej pewne dodatkowe założenia zachodzi nierówność

$$||M_n||_\Phi \leq C_\Phi ||N_n||_\Phi,$$

gdzie $C_\Phi$ jest pewną stałą, zależną tylko od funkcji $\Phi$. Warto dodać, że do tej pory metoda Burkholdera nie była stosowana w przestrzeniach Orlicza.

Okazuje się, że założenie słabej dominacji można osłabić, dopuszczając w definicji tej dominacji tylko niektóre funkcje wypukłe, a powyższe nierówności wciąż mają miejsce, i to z tymi samymi stałymi. Pozwala to nam na uzyskanie nowych wyników dotyczących następujących martyngałów.

**Definicja 3.** *Powiemy, że martyngał $M_n$ jest gaussowski, jeśli dla każdego $n \geq 1$ rozkład $d_n$ pod warunkiem $\mathcal{F}_{n-1}$ jest gaussowski.*

Dla martyngałów gaussowskich $(M_n)$, $(N_n)$ rozważamy następujący typ dominacji.

**Definicja 4.** *Powiemy, że martyngał $(N_n)$ dominuje martyngał $(M_n)$ w sensie wariancji, jeśli dla każdego $n \geq 1$ zachodzi nierówność*

$$\mathbb{E}(|d_n|^2|\mathcal{F}_{n-1}) \leq \mathbb{E}(|e_n|^2|\mathcal{F}_{n-1}) \text{ p.n.}.$$

Dowodzimy, że jeśli $(M_n)$, $(N_n)$ są martyngałami gaussowskimi takimi, że $(N_n)$ dominuje $(M_n)$ w sensie wariancji, to zachodzą nierówności

$$t\mathbb{P}(|M_n| \geq t) \leq 8\mathbb{E}|N_n|, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

oraz, dla $1 < p < \infty$,

$$(\mathbb{E}|M_n|^p)^{1/p} \leq K_p(\mathbb{E}|N_n|^p)^{1/p}, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

dla pewnych stałych $K_p$, $K_p \leq \frac{7}{p-1}$ dla $1 < p < 2$, $K_p < 3p$ dla $p \geq 2$. Jest to całkowicie nowy wynik, do tej pory rozważano jedynie takie pary martyngałów gaussowskich, że dla $n \geq 1$ łączny rozkład różnic $(d_n, e_n)$ pod warunkiem $\mathcal{F}_{n-1}$ jest gaussowski.

Uzyskujemy także następujący nowy rezultat. Ustalmy $p > 2$ i niech $(M_n)$, $(N_n)$ będą takimi martyngałami o wartościach w przestrzeniach Hilberta, że dla każdego $n \geq 1$ zachodzą nierówności

$$\mathbb{E}(|d_n|^2|\mathcal{F}_{n-1}) \leq \mathbb{E}(|e_n|^2|\mathcal{F}_{n-1}), \text{ p.n.}$$

$$\mathbb{E}(|d_n|^p|\mathcal{F}_{n-1}) \leq \mathbb{E}(|e_n|^p|\mathcal{F}_{n-1}) \text{ p.n.}$$

(jest to nowy typ dominacji; wiąże się ona z nierównością Rosenthala). Wówczas zachodzi nierówność

$$(\mathbb{E}|M_n|^p)^{1/p} \leq 3p(\mathbb{E}|N_n|^p)^{1/p},\ n = 0, 1, 2, \dots.$$

# References


[1] R. Bañuelos, *Martingale transforms and related singular integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. 293 (1986), 547-563.

[2] R. Bañuelos, *A sharp good-$\lambda$ inequality with an application to Riesz transforms*, Mich. Math. J. 35 (1988), 117-125.

[3] R. Bañuelos, G. Wang, *Sharp inequalities for martingales with applications to the Beurling-Ahlfors and Riesz transformations*, Duke Math. J. 80 (1995), 575-600.

[4] J. Bourgain, *Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional*, Ark. Mat. 21 (1983), 163-168.

[5] D. L. Burkholder, *Martingale Transforms*, Ann. Math. Statist. 37 (1966), 1494-1504.

[6] D. L. Burkholder, *Distribution function inequalities for martingales*, Ann. Prob. 1 (1973), 19-42.

[7] D. L. Burkholder, *Exit times of Brownian motion, harmonic majorization and Hardy spaces*, Advances in Math. 26 (1977), 182-205.

[8] D. L. Burkholder, *A sharp inequality for martingale transforms*, Ann. Prob. 7 (1979), 858-863.

[9] D. L. Burkholder, *A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional*, Ann. Prob. 9 (1981a), 997-1011.

[10] D. L. Burkholder, *Martingale transforms and the geometry of Banach spaces*, Proceedings of the Third International Conference on Probability in Banach Spaces, Tufts University, 1980, Lecture Notes in Mathematics 860 (1981b), 35-50.

[11] D. L. Burkholder, *A nonlinear partial differential equation and the unconditional constant of the Haar system in $L^p$*, Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982), 591-595.

[12] D. L. Burkholder, *A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions*, „Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund (Chicago, 1981)", wydawcy: William Beckner, Alberto P. Calderón, Robert Fefferman and Peter W. Jones, Wadsworth, Belmont, California, 1983, pp. 270-286.

[13] D. L. Burkholder, *Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms*, Ann. Prob. 12 (1984), 647-702.

[14] D. L. Burkholder, *An elementary proof of an inequality of R. E. A. C. Paley*, Bull. London Math. Soc. 17 (1985), 474-478.

[15] D. L. Burkholder, *An extension of a classical martingale inequality*, „Probability Theory and Harmonic Analysis", wydawcy: J. A. Chao and W. A. Woyczynski. Marcel Dekker, New York, (1986a), pp.21-30.

[16] D. L. Burkholder, *Martingales and Fourier analysis in Banach spaces*, C.I.M.E. Lectures, Varenna (Como), Italy, 1985, Lecture Notes in Mathematics 1206 (1986b), 61-108.

[17] D. L. Burkholder, *A sharp and strict $L^p$ inequality for stochastic integrals*, Ann. Prob. 15 (1987), 268-273.

[18] D. L. Burkholder, *A proof of Pełczyński's conjecture for the Haar system*, Studia Math. 91 (1988a), 79-83.

[19] D. L. Burkholder, *Sharp inequalities for martingales and stochastic integrals*, Colloque Paul Lévy, Palaiseau, 1987, Astérisque 157-158 (1988b), 75-94.

[20] D. L. Burkholder, *Differential subordination of harmonic functions and martingales*, Proceedings of the Seminar on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, El Escorial, 1987, Lecture Notes in Mathematics 1384 (1989a), 1-23.

[21] D. L. Burkholder, *On the number of escapes of a martingale and its geometrical significance*, „Almost Everywhere Convergence", wydawcy: Gerald A. Edgar i Louis Sucheston. Academic Press, New York, (1989b), pp. 159-178.

[22] D. L. Burkholder, R. F. Gundy, *Extrapolation and interpolation of quasilinear operators on martingales*, Acta. Math. 124 (1970), 249-304.

[23] P. Hitczenko, *Comparison of moments for tangent variables*, Probab. Theory and Rel. Fields, 78 (1988), 223-230.

[24] S. Kwapień, *Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients*, Studia Math. 44 (1972), 583-595.

[25] S. Kwapień, W. A. Woyczyński, *Tangent sequences of random variables: basic inequalities and their applications*, „Almost Everywhere Convergence", wydawcy: Gerald A. Edgar i Louis Sucheston. Academic Press, New York, 1989, pp.237-265.

[26] S. Kwapień, W. A. Woyczyński, *Random Series and Stochastic Integral: Single and Multiple*, 1992 Birkhäuser

[27] T. R. McConnell, *Decoupling and stochastic integration in UMD Banach space*, Prob. Math. Stat. 10 (1989), 283-295.

[28] J. Marcinkiewicz, *Quelques théorémes sur les séries orthogonales*, Ann. Soc. Polon. Math. 16 (1937), 84-96.

[29] G. Pisier, *Un exemple concernant la super-réflexivité*, in „Séminaire Maurey-Schwartz, 1974-75", École Polytechnique, Paris, 1975a.

[30] G. Pisier, *Martingales with values in uniformly convex spaces*, Israel J. Math. 20 (1975b), 326-350.

[31] G. Wang, *Some sharp inequalities for conditionally symmetric martingales*, rozprawa doktorska, University of Illinois, Urbana , Illinois, 1989.

[32] G. Wang, *Sharp square-function inequalities for conditionally symmetric martingales*, Trans. Amer. Math. Soc. 328 (1991b), 393-419.

[33] G. Wang, *Sharp maximal inequalities for conditionally symmetric martingales and Brownian motion*, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), 579-586.

[34] G. Wang, *Sharp inequalities for the conditional square function of a martingale*, Ann. Probab. 19 (1991), 1679-1688.