Prof. dr hab. Łukasz Delong
Instytut Ekonometrii
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Warszawa, 21.02.2022

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Zofii Miśkiewicz pt. „Stochastic volatility in selected models of financial markets"

Rozprawa doktorska Zofii Miśkiewicz dotyczy własności procesów stochastycznych rozważanych w modelach stochastycznej zmienności i wykorzystywanych w matematyce finansowej do modelowania cen akcji i wyceny instrumentów pochodnych.

Rozprawa doktorska składa się z czterech rozdziałów. **Rozdział I** zawiera wstęp do rozprawy, w którym Autorka przedstawia główne rezultaty swojej pracy oraz zagadnienie zmienności implikowanej w matematyce finansowej. W **Rozdziale II** Autorka opisuje, znane w literaturze, numeryczne techniki transformaty Fouriera i aproksymacji gęstości w oparciu o momentu, które są wykorzystywane w kolejnych rozdziałach pracy w przykładach numerycznych. Rozdziały III i IV zawierają główne wyniki rozprawy doktorskiej.

Rozdział III powstał w oparciu o wspólny artykuł Doktorantki z prof. Jakubowskim i dr. Wiśniewolskim. Artykuł został opublikowanym w Lithuanian Mathematical Journal. W rozdziale 3.2.1 Autorka, wraz ze współautorami, wyznacza momenty rzędu α wartości procesu Stein-Steina w momencie t. Momenty zostały wyznaczone trzema różnymi technikami, w zależności od parametrów procesu, ponieważ autorzy korzystają z różnych własności procesów, z których można skorzystać tylko przy odpowiedniej kombinacji parametrów procesu Stein-Steina. Otrzymane wyniki są oryginalne. Następnie, w rozdziale 3.2.2 autorzy wyznaczają transformatę Mellina wartości procesu Stein-Steina w momencie t, co równoważne jest z zadaniem wyznaczenia funkcji charakterystycznej dla logarytmu procesu Stein-Steina. Problem był już wcześniej rozważany w literaturze w pracy Schoebel i Zhu (autorzy są świadomi tej pracy). Dowód autorów (Miśkiewicz, Jakubowski, Wiśniewolski) jest analogiczny jak w pracy Schoebel i Zhu, z tą różnicą, że autorzy dokładnie definiują zbiór argumentów funkcji i parametrów modelu Stein-Steina, przy których funkcja charakterystyczna może być wyznaczona (przy zastosowanej technice dowodu). Jest to ważne uzupełnienie wyników z pracy Schoebel i Zhu. Rozdział III kończą przykłady numeryczne (rozdział 3.3), w których Autorka pokazuje jak zastosować wyprowadzone formuły matematyczne przy wycenie opcji. Autorka demonstruje umiejętność zastosowania transformaty Fouriera i funkcji charakterystycznej w praktycznych problemach z matematyki finansowej. Dodatkowo, Autorka wyprowadza wzór typu Blacka-Scholesa na potrzeby wyceny opcji potęgowych – analogiczny wzór pojawia się w pracy Schoebela i Zhu do wyceny opcji call (stosujemy tutaj ogólną reprezentację z matematyki finansowej wykorzystującą technikę zamiany miary i odwrotność funkcji charakterystycznej do wyznaczenia prawdopodobieństw).

Rozdział IV został przygotowany na podstawie samodzielnego artykułu Doktorantki, który został opublikowany w Stochastic Analysis and Applications. W rozdziale 4.2 Autorka wprowadza zmianę czasu opartą o łańcuch Markowa (proces Markowa w czasie ciągłym o skończonej liczbie stanów). Podobne zagadnienie zmiany czasu rozważane było np. w pracy Kruhnera i Schnurra dla procesów Levy'ego (Autorka cytuje tę pracę). Autorka rozważa jednak łańcuchy Markowa i dopuszcza niejednorodne w czasie funkcje g generujące zmiany czasu. Pokazuje, że równanie zmiany czasu (4.2.1) ma dokładnie jedno rozwiązane, które jest momentem stopu, konstruuje to rozwiązanie i wyznacza macierz intensywności przejścia dla łańcucha Markowa po zmianie czasu (odpowiednik Twierdzenia 3.3 z pracy Kruhnera i Schnurra). Aparat matematyczny oraz końcowe wyniki dla łańcuchów Markowa są oryginalne i inne niż w pracy Kruhnera i Schnurra. W rozdziale 4.3. Autorka bada zgodność dla

AD

łańcuchów Markowa po zmianie czasu, pokazuje, kiedy zgodny łańcuch Markowa po zmianie czasu jest zgodny, i kiedy można otrzymać zgodny łańcuch Markowa stosując zmianę czasu do procesu, który nie jest zgodnym łańcuchem Markowa (wprowadza pojęcie quasi-Markov consistent). W mojej opinii ten fragment pracy nie powinien się znaleźć w rozprawie doktorskiej ponieważ dotyczy innych zagadnień, które nie są związane z głównym tematem doktoratu. W rozdziale 4.4 Autorka przedstawia nowe matematyczne rezultaty wiążące przełącznikowe procesy dyfuzji z procesami dyfuzji po zmianie czasu. Doktorantka pokazuje, że proces dyfuzji po zmianie czasu, gdzie zmiana czasu oparta jest o łańcuch Markowa, prowadzi nas do szczególnego typu przełącznikowego procesu dyfuzji. Dodatkowo, jednowymiarowe składowe wielowymiarowego przełącznikowego procesu dyfuzji (o pewnej szczególnej postaci) można przedstawić jako procesy dyfuzji po zmianie czasu. Rozdział IV kończy przykład numeryczny. Autorka demonstruje wycenę opcji w dyfuzyjnym modelu przełącznikowym, gdzie symulacje przeprowadzane są w modelu dyfuzyjnym przez zmianę czasu.

Konkluzja:

Jeżeli chodzi o stronę matematyczną rozprawy, nie mam istotnych zastrzeżeń. Rozprawa jest również dobrze napisana. W obu aspektach, matematycznym i stylistycznym, mam jednak (subiektywne) wrażenie, że pewne fragmenty mogłyby być lepiej opisane lub pewne elementy mogłyby być dokładniej przeanalizowane z matematycznego i finansowego punktu widzenia (szczegółowe uwagi zamieszczam poniżej).

Podsumowując, moim zdaniem, praca zawiera bardzo ciekawe i nowe elementy z teorii procesów stochastycznych, które można również wykorzystać w matematyce finansowej. Rozprawa doktorska zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego. Autorka wykazała się ogólną wiedzą teoretyczną oraz umiejętnością prowadzenia samodzielnej pracy naukowej. Uważam, że warunki określone w art. 13 ust. 1 Ustawy z dn. 14 marca 2003 o stopniach naukowych i tytule naukowym zostały spełnione. Wnoszę o dopuszczenie do publicznej obrony.

Szczegółowe uwagi:

Poniżej załączam moje uwagi, które nie wpływają na pozytywną konkluzję, którą przedstawiłem powyżej. Chciałbym podkreślić, że nie oczekuję, że uwagi wskazane poniżej zostaną wprowadzone do rozprawy, i nie wnioskuję o poprawienie rozprawy doktorskiej. Mam jednak nadzieję, że zgłoszone przeze mnie uwagi będzie można omówić w trakcie obrony.

Rozdział I:

- Autorka pisze, że model Stein-Steina może budzić kontrowersje ponieważ zmienność może przyjąć wartości ujemne i twierdzi, że należy wybrać parametry w modelu, przy których prawdopodobieństwo ujemnych wartości zmienności jest zaniedbywalne. Problem jest jednak bardziej złożony i został omówiony w rozdziale 3 w pracy Schoebel i Zhu,
- Jedną z motywacji do rozważania modelu Stein-Steina i modeli przełącznikowych w rozprawie było zjawisko zmienności implikowanej, jej skośność i uśmiech. Autorka omawia zjawisko zmienności implikowanej w swojej rozprawie, ale już nie omawia jakie charakterystyki zmienności implikowanej są możliwe do uzyskania stosując model Stein-Steina i modele przełącznikowe. W szczególności, nie wspomina jakie korzyści otrzymamy z włączenia współczynnika korelacji w modelu Stein-Steina. W ostatnich latach, szczególne zainteresowanie w literaturze matematyki finansowej budzą modele oparte na ułamkowym ruchu Browna. Autorka powinna wspomnieć w swojej pracy o modelu *rough Stein-Stein* i jego własnościach w kontekście modelowanie zmienności implikowanej. Spodziewałbym się większego przeglądu literatury w zakresie analizowanych modeli i zjawiska implikowanej

dD

zmienności oraz przedstawienia zebranych informacji przez Doktorantkę w jej rozprawie (skoro jest to rozprawa (także) z matematyki finansowej).

Rozdział II:

- Opis techniki aproksymacji gęstości w rozdziale 2.2 jest bardzo słaby. Autorka powinna dokładnie przedstawić, jak działa metoda aproksymacji gęstości w oparciu o momenty, gdy wybierzemy momenty całkowite, i gdy wybierzemy momenty ułamkowe.

Rozdział III:

- Nie jest dla mnie jasne jaki jest wkład Autorki w artykuł we współautorstwie z prof. Jakubowskim i dr. Wiśniewolskim. Do rozprawy nie zostało załączone oświadczenie o udziałach autorów w artykule. Prosiłbym o informację w trakcie obrony,
- Autorka rozważa proces zmienności powracający do zera, równanie (3.2.2), jest to szczególny przypadek modelu Stein-Steina. Przypuszczam (proszę o potwierdzenie), że wyniki łatwo rozszerzyć na ogólny przypadek,
- Na s. 27 Autorka twierdzi, że proces ceny akcji S jest lokalnym martyngałem. Przypuszczam (proszę o potwierdzenie), ze proces jest martyngałem (częściowo jest to już udowodnione w Twierdzeniu 3.2.1, następnie można wykorzystać wyniki z książki Karatzas, Shreve nt. eksponenty stochastycznej lub Grigelionis, Mackericius „Finiteness of moments of a stochastic exponential"),
- Przypuszczam, że dowolny moment procesu ceny akcji S w dowolnym momencie czasu jest skończony (wykorzystujemy Grigelionis, Mackericius, „Finiteness of moments of a stochastic exponential" jak w punkcie powyżej). Jeżeli tak, wyniki w rozdziale 3.2. nie są kompletne, ponieważ znajdziemy kombinacje parametrów modelu ceny akcji i czasu t, która nie spełnia założeń żadnego z trzech twierdzeń. Prosiłbym o komentarz. Z punktu widzenia matematyki finansowej, warto dowiedzieć się jakie wartości parametrów modelu Stein-Steina pojawiają się najczęściej w praktyce i czy przedstawione twierdzenia pokrywają te parametry,
- Funkcja charakterystyczna w Twierdzeniu 3.2.8 została wyznaczona dla pewnego przedziału współczynników korelacji ρ. Jednocześnie, Schoebel i Zhu nie nałożyli żadnych ograniczeń na współczynnik korelacji. Jak rozumiem, założenia w Twierdzeniu 3.2.8 są wynikiem założeń pozwalających zastosować formułę Feynmana-Kaca z książki [41]. Czy stosowane były inne twierdzenie, o innych założeniach niż w [41], które pozwalają zastosować formułę Feynmana-Kaca? Schoebel i Zhu stosują inne twierdzenie Feynmana-Kaca w swoim artykule. Prosiłbym o komentarz,
- Schoebel i Zhu twierdzą, że zastosowanie formuły z zespolonym logarytmem jest trudne numerycznie. Autorka nie porusza tego tematu w przykładzie numerycznym. Czy autorka nie miała problemów numerycznych w implementacji formuły do wyceny opcji?
- Autorka twierdzi, że formuła (3.3.2) nie zależy od R „as long as it lives in the right interval". Autorka nie komentuje wyboru R w swoich przykładach numerycznych. Czy dla każdego R spełnione będą założenia Twierdzenia 3.2.8?
- W przykładach numerycznych brakuje mi rozważań nad metodami numerycznymi. Oczywiście rozumiem, że są to „tylko" przykłady numeryczne ilustrujące wzory matematyczne, jednak wydaje mi się, że należało dokładniej przyjrzeć się metodom obliczeniowym (lub je lepiej opisać). Na dwie kwestie już zwróciłem uwagę powyżej (logarytm zespolony i parametr R). Po trzecie, stosując metodę wyceny z aproksymacją funkcji gęstości, trzeba policzyć całkę, aby otrzymać cenę opcji, co wymaga dyskretyzacji całki - Autorka nie wspomina w rozprawie jak podeszła do tego problemu. Dodatkowo, nie jest także dla mnie jasne, które momenty

dD

ułamkowe zostały wybrane do aproksymacji funkcji gęstości, ile tych momentów było i jak dokładna była to aproksymacja (przypuszczam, że można ocenić błąd aproksymacji np. wykorzystując odwrotną transformatę Fouriera),

- Autorka przedstawia w przykładzie numerycznym wyniki aproksymacji cen opcji przy pomocy trzech metod numerycznych, porównuje je i wyciąga pewne konkluzje, ale nie wiemy, która metoda daje cenę najbliższą prawdziwej cenie, nie wiemy więc, która z metod jest najlepsza. Z mojego doświadczenia, najczęściej jako prawdziwą cenę traktuje się cenę otrzymaną metodą Monte Carlo przy dużej liczbie powtórzeń symulacji.

Rozdział IV:

- Wydaje mi się, że rozdział 4.2 ma potencjał do rozszerzenia przy minimalnych zmianach w dowodach i założeniach. Można chyba założyć, że łańcuch Markowa jest niejednorodny i ma intensywności zależne od dodatkowego procesu stochastycznego, co pozwoliłoby na możliwość bezpośredniego modelowania zależności pomiędzy jednowymiarowymi komponentami łańcucha Markowa. Oczywiście Autorka dopuszcza zależne komponenty łańcucha Markowa w swojej definicji zmiany czasu, ale, według mojej wiedzy, powyższy schemat ze stochastycznymi intensywnościami jest często używany w matematyce finansowej do modelowania zależności pomiędzy łańcuchami. Funkcja g też mogłaby zależeć od dodatkowego procesu stochastycznego. Wydaje się, że ten dodatkowy proces stochastyczny nie musi być niezależny od dyfuzyjnego procesu ceny akcji przy konstrukcji zmiany czasu, i jako dodatkowy proces można byłoby nawet wybrać dyfuzyjny proces ceny akcji. Chciałbym wspomnieć, że literaturze rozważane są modele przełącznikowe z efektem zwrotnym: np. Elliot, Siu, Badescu, On pricing and hedging options in regime switching models with feedback effect. Autorka zamieszcza także informację o takich procesach w Remark 4.4.2. Prosiłbym o komentarz czy powyższe rozszerzenia są możliwe. Nie proszę o przeprowadzenie nowych dowodów, pytam o intuicję Doktorantki,
- Dyfuzyjny model przełącznikowy (4.4.5) ma bardzo szczególną postać, stąd moje zainteresowanie na ile zaproponowaną metodę zmiany czasu można rozszerzyć, aby dostać trochę bardziej ogólną postać procesu ceny akcji w modelu przełącznikowym. Wydaje się to być szczególnie ważne w sytuacji wielowymiarowej. Zastosowanie jednej zmiany czasu do wszystkich komponentów wielowymiarowego dyfuzyjnego procesu cen akcji, może zbyt mocno skorelować procesy cen akcji, z drugiej strony zastosowanie niezależnych od siebie zmian czasów do komponentów może nie pozwolić na modelowanie zależności cen akcji w wystarczającym stopniu (podobny problem co w klasycznym problemie zmiany czasu dla dyfuzji przy pomocy subordynatorów),
- Chociaż nie wpływa to na definicję całki stochastycznej, wolałbym oznaczenie $\varepsilon(t-)$ w równaniu (4.4.2),
- W Remark 4.4.5 Autorka wspomina, że można wyznaczyć funkcję charakterystyczną logarytmu ceny akcji w modelu ze zmianą czasu wykorzystując funkcję charakterystyczną zmiany czasu (przy niezależności zmiany czasu i ceny akcji). Uważam, że ten komentarz należało bardziej rozwinąć w rozprawie, ponieważ zagadnienie wyceny opcji w oparciu o funkcje charakterystyczne jest elementem rozważań w Rozdziale III. Prosiłbym o informację czy w zaproponowanym w rozprawie modelu zmiany czasu, możemy wyznaczyć funkcję charakterystyczną? Czy można wyznaczyć momenty procesu ceny i zastosować aproksymację gęstości w oparciu o momenty? Czy to jest skomplikowane?
- Na s. 49 napisano: „Such a representation is desirable in many financial applications". Prosiłbym o przykłady, moim zdaniem jedyne zastosowanie to sytuacja, gdy wyceniamy opcję opartą o jeden komponent modelu ceny akcji (i wtedy przedstawione rozwiązanie jest

dh

naturalne bo patrzymy na rozkłady brzegowe wielowymiarowego procesu cen akcji). W innych zastosowaniach, moim zdaniem, struktura zależności między komponentami będzie odgrywała rolę i nie chcemy wyodrębniać jednowymiarowych komponentów z wielowymiarowego procesu cen akcji,

- W przykładzie numerycznym do generowanie trajektorii ceny akcji wykorzystano technikę zmiany czasu. Nie widzę jednak korzyści z takiej metody symulacji w porównaniu ze schematem Eulera bezpośrednio zastosowanym do przełącznikowego modelu dyfuzji. Prosiłbym o komentarz,
- Autorka nie podała błędów estymacji stosując metody symulacji Monte Carlo. Stosując metody symulacji warto podać błędy i przedziały ufności, aby ocenić precyzję szacunków.

Tadeusz Dębowy