Warszawa

17.08.21

Tomasz Weiss
prof. ndzw. dr hab.
Wydział Matematyki
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego
w Warszawie

Recenzja rozprawy doktorskiej p. Ziemowita Kostany

Rozprawa doktorska p. Ziemowita Kostany składa się z pięciu rozdziałów. Rozdział pierwszy zawiera rys historyczny oraz streszczenie najważniejszych rezultatów autora. W rozdziale drugim omówiona jest klasyczna teoria Fraïssé. Niech K będzie klasą skończonych struktur w pewnym przeliczalnym języku pierwszego rzędu. Powiemy, że K ma *własność wspólnego zanurzenia (JEP)*, jeśli dla każdych $a, b \in K$ istnieje $c \in K$ oraz zanurzenia $a \hookrightarrow c$, $b \hookrightarrow c$.

K ma *własność amalgamacji (AP)*, jeśli dla każdych par zanurzeń $f\colon a \hookrightarrow b$, $g\colon a \hookrightarrow c$ istnieją $d \in K$ oraz zanurzenia $f'\colon b \hookrightarrow d$, $g'\colon c \hookrightarrow d$ spełniające $f' \circ f = g' \circ g$. Klasa K jest *dziedziczna* jeśli dla każdego $b \in K$ i zanurzenia $a \hookrightarrow b$, $a \in K$.

Powiemy, że klasa K jest *klasą Fraïssé*, jesli spełnia powyższe trzy warunki i ma przeliczalnie wiele modeli z dokładnością do izomorfizmu. Jeśli w definicji własności amalgamacji dodamy warunek $\operatorname{rg} f' \cap \operatorname{rg} g' = \operatorname{rg}(f' \circ f)$, to otrzymamy *własność silnej amalgamacji (SAP)*. Klasa K ma *własność rozgałęzienia (SP)*, jeśli dla wszystkich $a, b, c \in K$ i wszystkich zanurzeń izomorficznych $f\colon a \hookrightarrow b$, $g\colon a \hookrightarrow c$ istnieją $d \in K$ oraz zanurzenia $f'\colon b \hookrightarrow d$, $g'\colon c \hookrightarrow d$ spełniające $f' \circ f = g' \circ g$ oraz $\operatorname{rg} f' \cap \operatorname{rg} g' = \operatorname{rg}(f' \circ f)$.

Przeliczalna struktura A jest:

- K-*uniwersalna*, jeśli dla każdej struktury $a \in K$ istnieje zanurzenie $a \hookrightarrow A$,
- *iniektywna*, jeśli dla każdej pary zanurzeń $f\colon a \hookrightarrow A$, $g\colon a \hookrightarrow b$, gdzie $a, b \in \operatorname{Age} A$ (skończone podstruktury A), istnieje zanurzenie $F\colon b \hookrightarrow A$, takie że $F \circ g = f$,

- *jednorodna*, gdy każdy izomorfizm między skończonymi podstrukturami A przedłuża się do automorfizmu.

Zachodzi następujące fundamentalne twierdzenie pochodzące od Fraïssé.

Twierdzenie. *Jeśli K jest klasą Fraïssé, to istnieje jedyna z dokładnością do izomorfizmu przeliczalna jednorodna struktura $\mathbb{K}$ taka, że* $\operatorname{Age}\mathbb{K} = K$.

Autor przedstawia dwa dowody powyższego twierdzenia Fraïssé, a następnie podaje przykłady klas Fraïssé takich jak:

- skończone porządki liniowe,
- skończone grafy,
- skończone grupy,
- skończone algebry Boole'a,
- skończone wymierne przestrzenie metryczne.

Rozdział trzeci, poświęcony teorii Fraïssé–Jónssona, autor rozpoczyna od przypomnienia trzech znanych twierdzeń charakteryzujących pewne nieprzeliczalne liniowe porządki, grafy i algebry Boole'a. Przykładowo, zachodzą następujące twierdzenia.

Załóżmy CH. Wtedy wszystkie przeliczalnie nasycone liniowe porządki mocy $\mathfrak{c}$ są izomorficzne (Hausdorff, Sierpiński).

Załóżmy CH. Wtedy wszystkie algebry Boole'a mocy $\mathfrak{c}$, które mają silną własność przeliczalnego rozdzielania są izomorficzne (Parowiczenko).

W dalszej części rozprawy autor prezentuje uogólnioną wersję twierdzenia Fraïssé i wprowadza następujące pojęcia.

Powiemy, że porządek liniowy $(L, \leqslant)$ jest *przeliczalnie nasycony* jeśli dla dowolnych przeliczalnych $A, B \subseteq L$, takich że $A < B$ istnieje x o własności dla każdych $a \in A$, $b \in B$ $a < x < b$. Następujący zbiór L^{ω_1} jest przykładem liniowego porządku przeliczalnie nasyconego.

$$L^{\omega_1} = \{x \in [-1, 1]^{\omega_1} : \{\alpha < \omega_1 : x(\alpha) \neq 0\} \leqslant \omega\}$$

oraz porządek na L^{ω_1} jest porządkiem leksykograficznym. Porządek liniowy przeliczalnie nasycony L jest *pierwszy*, gdy każdy przeliczalnie nasycony porządek liniowy zawiera izomorficzną kopię L.

Twierdzenie (Harzheim). *Wszystkie pierwsze przeliczalnie nasycone porządki liniowe są izomorficzne.*

Następujące twierdzenie jest oryginalnym rezultatem autora rozprawy.

Twierdzenie (Kostana). *Każdy izomorfizm pomiędzy przeliczalnymi lub zupełnymi w sensie Dedekinda podzbiorami L^{ω_1} przedłuża się do automorfizmu.*

Rozdział czwarty poświęcony jest analogiom między granicą Fraïssé a zbiorami dodawanymi przez filtry zupełne nad pewnymi forsingami. Definiujemy dla zbioru S nieskończonego i liczby kardynalnej λ

$$F_n(S, K, \lambda) = \{A \in K : F(A) \in [S]^{<\lambda}\}$$

i porządkujemy ten zbiór przez odwrotną relację inkluzji. Zachodzi następujące twierdzenie pochodzące od W. Kubisia.

Twierdzenie. *Jeśli K ma własność SP oraz K_ω ma co najwyżej przeliczalnie wiele typów izomorfizmu, to $F_n(S, K, \omega)$ ma własność c.c.c., a nawet własność Knastera.*

Twierdzenie. *Niech $P = F_n(\omega, K, \omega)$ gdzie K jest klasą Fraïssé z własnością SP. Wówczas dla filtru zupełnego G w P struktura $\bigcup G$ jest izomorficzna z granicą Fraïssé $\mathbb{K}$ klasy K_ω.*

Niech $\mathcal{LO}$ oznacza klasę wszystkich porządków liniowych.

Twierdzenie. $F_n(\omega_1, \mathcal{LO}, \omega) \Vdash$ *"porządek zupełny jest ω_1-gęsty i ośrodkowy".*

Następujące rezultaty pochodzą od Z. Kostany. Pierwszy z nich świadczy o tym, że struktura dodana przez forsing $F_n(\omega_1, K, \omega)$ jest zupełnie inna niż granica Fraïssé otrzymana przez $F_n(\omega, K, \omega)$ o której wiemy, że jest jednorodna.

Twierdzenie. *Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą wszystkich struktur dowolnego z poniższych rodzajów:*

– porządki liniowe,

– porządki częściowe,

– grafy,

– przestrzenie metryczne o odległościach wymiernych.

Wówczas dla S-nieprzeliczalnego $F_n(S, \mathcal{F}, \omega) \Vdash$ "struktura zupełna na S jest sztywna".

Twierdzenie. *Jest niesprzeczne z ZFC, że istnieje ω_1-gęsty porządek liniowy $(A, \leqslant)$ oraz automorfizm $\varphi : A \to A$ o własnościach:*

- *dla każdego $a \in A$ $\varphi(a) > a$,*
- $\mathrm{Aut}(A, \leqslant) = \{\varphi^k : k \in Z\}$.

Następująca definicja pojawia się w pracy Avrahama i Shelaha z 1981 r. Powiemy, że nieprzeliczalny zbiór A jest *rosnący*, jeśli dla każdej nieprzeliczalnej rodziny parami rozłącznych n-tek $\{x_1^\xi, \ldots, x_n^\xi\} \subseteq A^n$ istnieją indeksy $\eta \neq \xi$ takie, że dla $i, j = 1, \ldots, n$

$$x_i^\xi \leqslant x_i^\eta \longleftrightarrow x_j^\xi \leqslant x_j^\eta.$$

Korzystając z powyższego pojęcia Avraham i Shelah udowodnili następujący fakt.

Twierdzenie. *Jest niesprzeczne z* $\mathrm{ZFC} + \mathrm{MA}_{\omega_1}$, *że istnieje ω_1-gęsty ośrodkowy porządek A taki, że każda nieprzeliczalna funkcja $f \subseteq A \times A$ jest monotoniczna na zbiorze nieprzeliczalnym.*

Wynika stąd i z własności forsingu ccc, że $(A, \leqslant)$ nie jest izomorficzny z $(A, \geqslant)$. Kontrastuje to ze znanym twierdzeniem Baumgartnera z 1973, który jest rezultatem odwrotnym do powyższego wyniku.

Używając pojęcia zbioru rosnącego Z. Kostana wprowadza w rozdziale piątym analogiczną definicję *n-krotek podobnych* w X^n dla przestrzeni metrycznej (X, d), oraz określa tzw. przestrzeń (X, d) *prostokątną*.

W ten sposób autor rozprawy uzyskuje następującą wersję powyższego rezultatu Avrahama i Shelaha.

Twierdzenie. *Jest niesprzeczne z teorią* $\mathrm{ZFC} + \mathrm{MA}_{\omega_1}$ *istnienie prostokątnej przestrzeni metrycznej X, ośrodkowej i mocy ω_1, z odległościami wymiernymi, takiej, że każda nieprzeliczalna częściowa funkcja różnowartościowa $f \subseteq X \times X$ jest izometrią na zbiorze nieprzeliczalnym.*

Zastępując odległość między punktami przestrzeni metrycznej przez funkcję różnowartościową numerującą typy izomorficzne par (a_0, a_1), gdzie a_0, a_1 należą do ustalonej klasy Fraïssé i stosując pomysł Avrahama i Shelaha autor rozprawy udowadnia następujące dwa twierdzenia.

Twierdzenie. *Jest niesprzeczne z teorią* ZFC + MA + $\mathfrak{c} = \omega_2$, *że istnieje przestrzeń prostokątna (w sensie modelowym) mocy* ω_1.

Twierdzenie. *Przy założeniu* MA_{ω_1}, *jeśli* X *jest strukturą prostokątną (w sensie modelowym) mocy* ω_1, *to każda nieprzeliczalna różnowartościowa częściowa funkcja* $f \subseteq X \times X$ *jest homomorfizmem na zbiorze nieprzeliczalnym.*

W ostatnich podrozdziałach rozprawy, autor prezentuje zastosowanie wcześniejszych argumentów w teorii grafów mocy ω_1 i liniowych ośrodkowych porządków ω_1-nasyconych.

Rozprawę doktorską p. Kostany kończy lista otwartych problemów związanych z zagadnieniami poruszanymi w czwartym i piątym rozdziale dyzertacji.

Konkluzja

Rozprawa doktorska p. Ziemowita Kostany zawiera szereg interesujących wyników własnych autora, które w większości mają charakter teoriomnogościowy. Ich dowody są niebanalne i według autora recenzji poprawne, chociaż argumentacja p. Kostany jest w kilku miejscach niejasna. Wadą rozprawy jest brak informacji, czy zamiarem autora jest opublikowanie wyników własnych cytowanych w preprintach. Uważam, że rozprawa p. Kostany spełnia warunki wymagane do otrzymania stopnia doktora, które są zawarte w odpowiedniej ustawie.

Tomasz Weiss