McGill

Department of Mathematics and Statistics
Département de mathématiques et de statistique

McGill University
Burnside Hall, room 1005
805 Sherbrooke St. West
Montreal, Quebec, Canada H3A 0B9

Université McGill
Burnside Hall, suite 1005
805, rue Sherbrooke Ouest
Montréal (Québec) Canada H3A 0B9

Tel/Tél : (514) 514-398-3800
Fax/Télécopieur: (514) 398-3899
www.mcgill.ca/mathstat

Gdańsk, 31 sierpnia 2021

Marcin Sabok
Wydział Matematyki i Statystyki
Uniwersytet McGilla
marcin.sabok@mcgill.ca

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Ziemowita Kostany

Rozprawa mgr. Kostany dotyczy tematyki na styku teorii mnogości i teorii modeli, a w szczególności dotyka zagadnień dotyczących teorii Fraïssego oraz forcingu. Teoria Fraïssego została rozwinięta w latach 50-tych XX wieku, a w ostatnich latach stała się dość popularna, między innymi dzięki centralnej roli, jaką odegrała w tzw. teorii KPT (Kechrisa, Pestova i Todorcevica) wiążącej dynamikę pewnych grup nieskończenie-wymiarowych oraz strukturalną teorię Ramseya. Obecnie badanie własności kombinatorycznych klas Fraissego stanowi jedną z bardziej aktywnych dziedzin na styku kombinatoryki i logiki matematycznej. Tematyka rozprawy dotyczy związków teorii Fraïssego z forcingiem, a konkretnie zastosowania elementów klas Fraïssego jako warunków w forcingu. Wyniki te dotyczą zarówno wykazywania niesprzeczności pewnych stwierdzeń z ZFC, jak i badania własności takich pojęć forcingu. Główne wyniki dotyczące niesprzeczności uzyskane przez mgr. Kostanę stanowią kontynuację badań Avrahama i Shelaha z lat 80 XX wieku.

Trzy pierwsze rozdziały rozprawy stanowią wprowadzenie i przegląd klasycznych lub znanych wyników. Rozdział 2 skupia się na klasycznej teorii Fraïssego, z licznymi przykładami oraz dowodem głównego twierdzenia tej teorii, czyli charakteryzacji przeliczalnych modeli jednorodnych jako granic klas Fraïssego. Rozdział 3 dotyczy struktur nieprzeliczalnych. Tu doktorant analizuje różne przykłady modeli nasyconych, a w szczególności przeliczalnie nasycone liniowe porządki. W tej części rozprawy pojawiaja się też wyniki własne doktoranta, np. nowe przykłady pierwszych przeliczalnie nasyconych liniowych porządkach (przeliczalnie nasycony model M jest nazywany pierwszym, jeśli każdy przeliczalnie nasycony model tej samej teorii zawiera kopię M). Używając analizy takich porządków przez pojęcie I-wymiaru, doktorant podaje również nowy dowód twierdzenia Harzheima charakteryzującego pierwsze przeliczalnie nasycone liniowe porządki.

Główne wyniki doktoratu znajdują się w dwóch ostatnich rozdziałach. Rozdział 4 poświęcony jest badaniu pojęć forcingu Fn(K,S,lambda), gdzie warunkami są struktury z danej klasy Fraïssego K, których uniwersum jest zawarte w ustalonym zbiorze S oraz ma moc niewiększą niż ustalona liczba kardynalna lambda. Tego typu pojęcia forcingu stanowią uogólnienie klasycznego forcingu Cohena i mają wiele jego własności. Jednak, w przypadku nieprzeliczalnego zbioru S, autor dowodzi dość zaskakującej własności powyższego forcingu (dla klasy K porządków liniowych), a mianowicie że struktura dodawana w rozszerzeniu forcingowym jest sztywna (tzn. nie dopuszcza nietrywialnych automorfizmów). Jest to wynik wyjaśniający też pewne niejasności obecne w literaturze. Mianowicie w artykule Golshaniego ([19] w bibliografii rozprawy) pojawiają się stwierdzenia mówiące, że struktura dodawana w rozszerzeniu forcingowym jest zawsze jednorodna (tzn izomorfizmy struktur z klasy Fraïssego można rozszerzać do automorfizmów struktury generycznej). Rozdział 4.2 rozprawy pokazuje, że te stwierdzenia z [19] nie są prawdziwe w dość silnym sensie (struktura jest sztywna).

Ostatni rozdział zawiera dowód głównego twierdzenia rozprawy. Autor dowodzi, że niesprzeczne z aksjomtem Martina jest nastepujące stwierdzenie: istnieje nieprzeliczalna ośrodkowa wymierna przestrzeń metryczna, na której każda częściowa funkcja różnowartościowa jest izometrią po ograniczeniu do pewnego zbioru nieprzeliczalnego. Stwierdzenie to jest motywowane analogicznym stwierdzeniem klasycznego wyniku Avrahama i Shelaha z lat 80 dotyczącego istnienia porządku liniowego (a dokładniej podzbioru prostej rzeczywistej), na którym każda częściowa funkcja różnowartościowa jest niemalejąca po ograniczeniu do pewnego zbioru nieprzeliczalnego. W dowodzie doktorant bada tzw. przestrzenie „prostokątne" i dowodzi, że pojęcie forcingu, które wprowadza w poprzednim rozdziale dla klasy Fraïssego przestrzeni metrycznych, dodaje przestrzeń prostokątną. a następnie pokazuje, jak z tej własności wynika (przy dodatkowych założeniach), że każda funkcja różnowartościowa jest izometrią po obcięciu do pewnego zbioru nieprzeliczalnego.

Dwa ostatnie rozdziały zawierają wiele pomocniczych wyników, o których nie wspominam, jednak chcę pokreślić, że dowody są zaawansowane technicznie i wymagają dobrego zrozumienia metody forcingu, a w szczególności technik stosowanych w pracy Avrahama i Shelaha. Warto zauważyć, że w dowodach autor wprowadza szereg nowych własności, które nie były badane wcześniej w literaturze, a które są wykorzystywane w dowodach w niniejszej rozprawie.

Wyniki rozprawy są zawarte w trzech samodzielnych artykułach ([29], [30], [31], w numeracji z bibliografii rozprawy), z których jeden jest opublikowany w Archive for Mathematical Logic, a dwa są złożone na arxiv. Rozprawa jako całość jest spójna tematycznie i dobrze napisana. W zasadzie nie znalazłem poważnych literówek.

Mam jedynie uwagę dotyczącą cytowania pracy Golshaniego [19], do której rozprawa dostarcza kontrprzykładów. W rozprawie znalazłem tylko dwa miejsca, w których doktorant cytuje pracę [19]. Na stronie 29 rozprawy znajduje sie uwaga mówiąca, że praca [19] jest „unfortunately not free of significant mistakes". Sformułowanie to brzmi dość enigmatycznie i nie wyjaśnia, jakie dokładnie błędy wkradły się do tej pracy. Sugerowałbym uściślić powyższą uwagę.

Uważam, że na podstawie przedstawionej rozprawy doktorskiej, pan Ziemowit Kostana w pełni zasługuje na nadanie stopnia doktora i wnioskuję o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Marcin Sabok

Marcin Sabok