prof. dr hab. Janusz Pawlikowski
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego
Janusz.Pawlikowski@math.uni.wroc.pl

Wrocław 05.09.2021

Recenzja pracy doktorskiej mgra Ziemowita Kostany pt. Forcing-theoretic framework for the Fraïssé theory

Praca próbuje zastosować teoriomnogościową metodę forcingu do uogólnienia teorii Fraïsségo.

Teoria Fraïsségo (zaproponowana w roku 1954 przez francuskiego matematyka Rolanda Fraïsségo) bada jak mając odpowiednią rodzinę $\mathcal{K}$ (klasę Fraïsségo) skończonych struktur i ich wzajemnych włożeń można w procesie granicznym wygenerować strukturę przeliczalną $\mathbb{K}$ (granicę Fraïsségo), która jest jednorodna i uniwersalna. Uniwersalność oznacza zawieranie z dokładnością do izomorfizmu wszystkich struktur z rodziny $\mathcal{K}$. Jednorodność oznacza, że dowolny izomorfizm pomiędzy skończonymi podstrukturami struktury $\mathbb{K}$ przedłuża się na całe $\mathbb{K}$. Własności klasy Fraïsségo gwarantują, że granica Fraïsségo jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Kanonicznym przykładem jest tutaj rodzina wszystkich skończonych porządków liniowych i $(\mathbb{Q}, \leq)$ (liczby wymierne wraz z naturalnym porządkiem) jako granicą Fraïsségo. Konstrukcje granic Fraïsségo mają zwykle charakter indukcyjny z wykorzystaniem metody „back and forth".

Z kolei metodę forcingu można by w dużym uproszczeniu opisać jako sposób konstruowania obiektów granicznych motywowany twierdzeniem Baire'a. Precyzujemy np. przeliczalnie wiele własności obiektu granicznego, w częściowym porządku $\mathcal{P}$ przybliżeń zauważamy, że każda z własności wycina zbiór otwarty i gęsty, ultrafiltry w $\mathcal{P}$ przecinające wszystkie te zbiory wyznaczają poszukiwane obiekty graniczne. W przypadku $(\mathbb{Q}, \leq)$ jako $\mathcal{P}$ możemy wziąć rodzinę tych skończonych porządków liniowych $(L, \leq)$, gdzie $L \subseteq \mathbb{N}$, uporządkowaną przez relację bycia podporządkiem. Następnie dla każdego $n \in \mathbb{N}$, rozważyć zbiór D_n tych $(L, \leq)$, że $n \in L$, zbiór E_n tych $(L, \leq)$, że $n \in L \Rightarrow (\exists k \in L)(k < n)$, zbiór F_n tych $(L, \leq)$, że $n \in L \Rightarrow (\exists k \in L)(n < k)$, oraz dla każdych $n, m \in \mathbb{N}$, zbiór G_{mn} tych $(L, \leq)$, że $(m, n \in L \wedge m < n) \Rightarrow (\exists k \in L)(m < k < n)$. Wtedy suma każdego ultrafiltru $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}$ przecinającego wszystkie powyższe zbiory jest zrealizowanym na uniwersum $\mathbb{N}$ porządkiem izomorficznym z $(\mathbb{Q}, \leq)$. Warto zwrócić uwagę, że dostajemy tutaj bardzo dużo (zbiór rezidualny) realizacji porządku $(\mathbb{Q}, \leq)$ na uniwersum $\mathbb{N}$. Ponieważ wszyskie realizacje są między sobą izomorficzne, obiekt graniczny jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

W związku z ponad półwiecznym potężnym rozwojem metody forcingu, w folklorze teoriomnogościowym od dawna funkcjonowało przekonanie, że warto byłoby przyjrzeć się głębiej zastosowaniom forcingu w teorii Fraïsségo. Praca mgra Ziemowita Kostany jest pierwszym poważnym tego typu przedsięwzięciem.

Praca jest dość obszerna, ma 69 stron i składa się z pięciu rozdziałów. Pierwsze trzy, stanowiące trzy piąte pracy, to opis klasycznej teorii Fraïsségo wraz z przykładami i dyskusją teorii Fraïsségo-Jónssona w rozdziale trzecim (przeniesienie klasycznej teorii na klasy modeli nieskończonych). Autor prezentuje w rozdziale trzecim kilka swoich opublikowanych rezultatów, z których najciekawsza jest obserwacja (Theorem 3.2.15, Corollary 3.2.16), że izomorfizmy pomiędzy przeliczalnymi lub zupełnymi w sensie Dedekinda podzbiorami $\mathbb{L}^{\omega_1}$ można przedłużać do automorfizmów $\mathbb{L}^{\omega_1}$. ($\mathbb{L}^{\omega_1}$ to porządek leksykograficzny na zbiorze ciągów z ω_1 w $[-1, 1]$, które od pewnego miejsca przyjmują wartość zero.)

Główną część pracy stanowią rozdziały czwarty i piąty. W rozdziale czwartym autor wprowadza swoje, uogólniające forcing Cohena, podstawowe narzędzie: $\mathrm{Fn}(S, \mathcal{K}, \omega)$. Tutaj S jest ustalonym zbiorem nieskończonym, $\mathcal{K}$ klasą struktur, a ω sygnalizuje ograniczenie mocy. Gdy klasa $\mathcal{K}$ jest klasą $\mathcal{LO}$ wszystkich porządków liniowych, $\mathrm{Fn}(S, \mathcal{LO}, \omega)$ jest uporządkowanym przez relację bycia podporządkiem zbiorem tych $(L, \leq) \in \mathcal{LO}$, że L jest skończonym podzbiorem S. Jak sygnalizowałem wyżej, odpowiedni obiekt generyczny (graniczny) dla $\mathrm{Fn}(\mathbb{N}, \mathcal{LO}, \omega)$ jest realizacją porządku $(\mathbb{Q}, \leq)$ na uniwersum $\mathbb{N}$, w szczególności ma wiele automorfizmów (jest jednorodny). Autor pokazuje, że sytuacja zmienia się diametralnie, gdy zbiór S jest nieprzeliczalny. Wtedy $\mathrm{Fn}(S, \mathcal{LO}, \omega)$ forsuje, że obiekt generyczny nie ma automorfizmów (jest sztywny). Można tutaj klasę $\mathcal{LO}$ zmieniać na wiele innych klas, np. częściowych porządków, grafów (skierowanych i nieskierowanych), przestrzeni metrycznych o odległościach wymiernych, turniejów. W pracy szczegółowo udowodnione są wersje dla grafów (Theorem 4.2.1) i częściowych porządków (Theorem 4.2.2). Trzeba podkreślić, że tego typu rozważania wymagają pewnej ostrożności, by wprowadzane forcingi nie trywializowały istotnej części wyjściowego uniwersum teorii mnogości poprzez tzw. kolapsowanie liczb kardynalnych. Na szczęście, jak zauważył Kubiś odpowiednio rozsądne założenia o $\mathcal{K}$ („splitting property") gwarantują, że $\mathrm{Fn}(S, \mathcal{K}, \omega)$ spełnia cenny forcingowy warunek ccc („countable chain condition") a nawet warunek Knastera. Sprawia to, że forcing za pomocą $\mathrm{Fn}(S, \mathcal{K}, \omega)$ jest dość przyjazny.

Interesująca jest też sytuacja, gdy podniesiemy ograniczenie mocy z ω_0 na ω_1. Wtedy forcing za pomocą $\mathrm{Fn}(\omega_2, \mathcal{LO}, \omega_1)$ nad uniwersum teorii mnogości spełniającym Hipotezę Continuum dodaje porządek, ktorego sztywność jest mocno absolutna, nie może być zniszczona przez żadne kolejne forcingi typu ccc (Theorem 4.2.3).

Rozwinięcie zastosowanej techniki pozwala w pewnym sensie projektować grupy automorfizmów dodawanych porządków generycznych. Autor pokazuje (Theorem 4.3.1) jak dodać porządek liniowy $(\mathbb{A}, \leq)$, ktory jest ośrodkowy (zawiera przeliczalny zbiór gęsty), jest ω_1-gęsty (odcinki są nieprzelicalne), i ma nietrywialny automorfizm ϕ taki, że $\{\phi^k : k \in \mathbb{Z}\}$ jest pełną grupą automorfizmów dla $(\mathbb{A}, \leq)$.

Rezultaty rozdziału czwartego wydają się być ciekawe, a ich dowody nietrywialne i wymagające znacznej biegłości w technice forcingu.

Najbardziej wartościowy i innowacyjny jest rozdział piąty pracy. Autor oczywiście ma tego swiadomość, główne twierdzenie tego rozdziału (Corollary 5.1.16) umieścił w abstrakcie na początku pracy. Mówi ono: Jeśli standardowa teoria mnogości ZF (Zermelo-Fraenkla) jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest też po dodaniu Aksjomatu Martina wraz z $2^\omega = \omega_2$ i zdania:

„Istnieje nieprzeliczalna ośrodkowa przestrzeń metryczna o odległościach wymiernych taka, że każda bijekcja pomiędzy jej nieprzeliczalnymi podzbiorami na pewnych nieprzeliczalnych podzbiorach jest izometrią.”

Twierdzenie to nawiązuje do znanego rezultatu Avrahama i Shelaha (*Martin's Axiom does not imply that every two $\aleph_1$-dense sets of reals are isomorphic*, Israel Journal of Mathematics, vol. 38 (1981), Nos. 1-2), pokazującego podobną niesprzeczność istnienia ω_1-gęstego ośrodkowego porządku liniowego $(\mathbb{A}, \leq)$, takiego że każda funkcja z nieprzeliczalnego podzbioru $\mathbb{A}$ w $\mathbb{A}$ jest monotoniczna na pewnym nieprzeliczalnym podzbiorze.

By udowodnić swoje twierdzenie autor odpowiednio adaptuje pojęcia i metody wprowadzone przez Avrahama i Shelaha. W szczególności wprowadza nowe techniczne pojęcie „prostokątnej przestrzeni metrycznej”. Potem pokazuje jak dodać taką przestrzeń za pomocą forcingu, i izoluje własność zapewniającą, że kolejne rozszerzenia forcingowe potrzebne do uzyskania Aksjomatu Martina nie psują prostokątności. Następnie pokazuje, że Aksjomat Martina implikuje, że prostokątne przestrzenie mają docelową wlasność zawężanie nieprzeliczalnych częściowych bijekcji do izometrii. Cały dowód jest dość długi (pięć stron) i zawiły, ponownie świadczy o znacznej biegłości w technice forcingu.

W dalszej części rozdziału piątego wprowadzone pojęcia i metody są rozszerzone na inne struktury i pokazane jest podobne twierdzenie (Theorem 5.2.4) dla porządków (częściowych i liniowych), grafów (skierowanych i nieskierowanych), turniejów. Rozdział zamyka zestaw rezultatów natury klasyfikacyjnej explorujących pojęcie prostokątności.

Praca mgra Ziemowita Kostany jest interesująca, nietrywialna, miejscami technicznie trudna, i stanowi istotny wkład w rozwój zastosowań teorii mnogości, w szczególności forcingu. Poza nielicznymi niezręcznościami językowymi nie znajduję w niej usterek, a prezentacja wydaje mi się wystarczająco zgrabna. Doceniam też wysiłek włożony w początkowe wstępne rozdziały. Praca mogłaby się w zasadzie składać z rozdziałów czwartego i piątego.

Stwierdzam, że praca stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego a także wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną jej autora oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Z pewnością spełnia ona ustawowe i zwyczajowe warunki stawiane pracom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie mgra Ziemowita Kostany do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Janusz Pawlikowski