dr hab. Tomasz Krawczyk
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków
krawczyk@tcs.uj.edu.pl

26 lipca 2023 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Wojciecha Nadary pt. „Graph Width Parameters. Dependecies, Algorithms, and Decompositions."

Rozprawa doktorska mgr Wojciecha Nadary zawiera szereg wyników opisujących zależności pomiędzy takimi parametrami grafowymi jak *głębokość drzewowa*, *szerokość drzewowa*, czy też *szerokość ścieżkowa*. Parametry te leżą u podstaw strukturalnej teorii grafów, teorii, której nadrzędnym celem jest badanie własności grafów, ze szczególnym uwzględnieniem tych, które można wykorzystać do projektowania wydajnych algorytmów. Dla wielu problemów obliczeniowych znane są algorytmy, które działają w sposób efektywny w klasach grafów, w których wyżej wspomniane parametry można stosunkowo dobrze ograniczyć; algorytmy takie zazwyczaj wykorzystują odpowiednie dekompozycje grafowe świadczące o tym, że parametry te są rzeczywiście małe. Stąd też, poszukuje się ciągle algorytmów konstruujących dekompozycje grafowe o możliwie małych parametrach, jak również bada się własności strukturalne grafów, które projektowanie takich algorytmów umożliwiają. W taką tematykę wpisuje się rozprawa doktorska mgr Wojciecha Nadary, a parametrem szczególnie badanym jest głębokość drzewowa.

Omówienie zawartości rozprawy

Zanim przejdziemy do omówienia wyników kolejnych rozdziałów rozprawy, zdefiniujemy wpierw parametry grafowe, które są przedmiotem badań.

Dekompozycją drzewową grafu G jest para (T, β), gdzie T jest drzewem zaś β funkcją ze zbioru $V(T)$ w zbiór $2^{V(G)}$, spełniająca warunki:

- dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$ zbiór $\{t \in V(T) : v \in \beta(t)\}$ indukuje niepuste poddrzewo w T,
- dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ istnieje $t \in V(T)$ o tej własności, że $u, v \in \beta(t)$.

Szerokością dekompozycji (T, β) jest liczba $\max_{t \in V(T)} |\beta(t)| - 1$. Dekompozycję drzewową (T, β) grafu G, w której T jest dodatkowo ścieżką, nazywamy *dekompozycją ścieżkową* G. *Szerokość drzewowa* (*szerokość ścieżkowa*) grafu G to minimalna szerokość dekompozycji drzewowej (ścieżkowej, odpowiednio) grafu G.

Lasem eliminacji grafu G jest ukorzeniony las F (każde drzewo w F ma wyróżniony korzeń) zdefiniowany na zbiorze wierzchołków $V(G)$ spełniający tę własność, że dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ wierzchołki u oraz v są w relacji przodek-potomek w lesie F. Las eliminacji F grafu G nazywamy *drzewem eliminacji* jeżeli F jest drzewem. *Głębokością* lasu eliminacji F grafu G jest maksymalna wysokość drzewa w lesie F. *Głębokość drzewowa* grafu G to minimalna głębokość lasu eliminacji G.

Największy średni stopień grafu G definiujemy jako $\max\left\{\frac{2|E(H)|}{|V(H)|} : H \text{ jest podgrafem } G\right\}$. *Liczba kolorująca* grafu G to najmniejsza liczba k taka, że wierzchołki G można ustawić w liniowy porządek, w którym każdy wierzchołek ma co najwyżej $(k-1)$ sąsiadów występujących w tym porządku wcześniej.

Rozdział 3: struktura grafów o dużej głębokości drzewowej, wielomianowy algorytm aproksymacyjny dla głębokości drzewowej. Pierwszym wynikiem rozdziału 3, opartego na pracy wspólnej z Wojciechem Czerwińskim i Marcinem Pilipczukiem, jest twierdzenie orzekające, że każdy graf o głębokości drzewowej ab ma szerokość drzewową $\Omega(a)$ lub zawiera jako podgraf drzewo o głębokości drzewowej $\Omega(b)$. Wynik ten opiera się na spostrzeżeniu, że w grafie spójnym o szerokości drzewowej a wszystkie jego poddrzewa o maksymalnej możliwej głębokości drzewowej przecinają pewien zbiór wierzchołków grafu rozmiaru co najwyżej $(a+1)$. Korzystając z wyniku Kawarabayashiego i Rossmana, który zapewnia, że każde drzewo o głębokości drzewowej k^2 zawiera jako podgraf ścieżkę długości 2^k lub subdywizję pełnego drzewa binarnego wysokości k, autor wnioskuje, że każdy graf o głębokości drzewowej k^3 zawiera jako podgraf graf o szerokości drzewowej $\Omega(k)$, ścieżkę długości $\Omega(2^k)$, lub subdywizję pełnego drzewa binarnego wysokości $\Omega(k)$. Wynik ten poprawia analogiczny rezultat, uzyskany z ograniczeniem $k^5 \log^2 k$, otrzymany przez Kawarabayashiego i Rossmana. Głównym wynikiem rozdziału 3 jest twierdzenie orzekające, że każde drzewo o głębokości drzewowej k zawiera poddrzewo podkubiczne o głębokości drzewowej $\Omega(k)$. Dowód powyższego lematu w bardzo pomysłowy sposób korzysta z liniowego algorytmu Schäffera obliczającego głębokość drzewową drzewa T, wprowadzając dwie dodatkowe funkcje potencjału ograniczające (od góry i od dołu) głębokość drzewową poddrzew T przetwarzanych przez ten algorytm. Funkcje te w rezultacie umożliwiają konstrukcję poddrzewa podkubicznego T o liniowej głębokości drzewowej względem głębokości drzewowej T. Ten techniczny wynik, wraz z narzędziami opracowanymi przez Kawarabayashiego i Rossmana, pozwala zaprojektować wielomianowy algorytm konstruujący las eliminacji grafu G o głębokości $O(k^2 \log^{3/2} k)$, gdzie k jest głębokością drzewową G. Algorytm o tym współczynniku aproksymowalności jest aktualnie najlepszy wśród algorytmów wielomianowych konstruujących las eliminacji grafu.

Rozdział 4: minimalne grafy o głębokości drzewowej d. Powiemy, że graf G jest *minimalnym grafem o głębokości drzewowej* d jeżeli głębokość drzewowa G wynosi d, zaś głębokość drzewowa każdego właściwego podgrafu indukowanego G jest istotnie mniejsza od d. Punktem wyjścia dla badań rozdziału 4 są następujące wyniki Dvořáka, Giannopoulousa i Thilikosa:

- każdy minimalny graf o głębokości drzewowej d ma co najwyżej $2^{2^{d-2}}$ wierzchołków,
- istnieją minimalne grafy o głębokości drzewowej d i głębokości drzewowej d liczące 2^{d-1} wierzchołków.

Ci sami badacze postawili również hipotezę (ciągle otwartą), że każdy minimalny graf o głębokości drzewowej d zawiera co najwyżej 2^{d-1} wierzchołków.

Główny wynik rozdziału 4 dowodzi, że każdy minimalny graf o głębokości drzewowej d zawiera co najwyżej $d^{O(d)}$ wierzchołków. Wynik ten poprawia więc ograniczenie górne na rozmiar minimalnego grafu o głębokości drzewowej d z podwójnie wykładniczego do wykładniczego względem d. Dowód tego twierdzenia, bardzo głęboki i elegancki, opiera się na następującym pomyśle. W grafie G o głębokości drzewowej d wybiera się, w ściśle określony sposób, $d^{O(d)}$ wierzchołków, które nazywane są *rdzeniem* G. Najogólniej rzecz ujmując, rdzeń G składa się z wierzchołków G utrzymujących pewne własności spójności w grafie G, które gwarantują, że głębokość drzewowa rdzenia jest nie mniejsza niż głębokość drzewowa G.

Rozdział 5: algorytmy dokładne obliczające głębokość drzewową grafu. Głównym wynikiem rozdziału 5 (bazującym na pracy wspólnej z Michałem Pilipczukiem i Marcinem Smulewiczem) są dwa algorytmy, które testują, czy głębokość drzewowa spójnego grafu wejściowego G jest mniejsza bądź równa d, i w przypadku odpowiedzi pozytywnej, konstruują las eliminacji G o głębokości d. Pierwszy z przedstawionych algorytmów jest deterministyczny i działa w czasie $2^{O(d^2)} \cdot n^{O(1)}$ i pamięci $n^{O(1)}$, drugi jest algorytmem probabilistycznym (z jednostronnym błędem) o oczekiwanym czasie działania $2^{O(d^2)} \cdot n$ i pamięci $d^{O(1)} \cdot n$. Algorytm deterministyczny korzysta z iteratywnej kompresji. Algorytm przetwarza wierzchołki grafu w porządku $v_1, \ldots, v_n$. Oznaczmy przez G_i podgraf G indukowany przez zbiór wierzchołków $\{v_1, \ldots, v_i\}$. Dla każdego $i \in [n]$ algorytm konstruuje drzewo eliminacji grafu G_i o głębokości d; w przypadku, gdy drzewa takiego nie ma, algorytm odrzuca G. Pojedynczy krok tego algorytmu wygląda następująco.

Z drzewa eliminacji grafu G_i głębokości d konstruowane jest drzewo eliminacji T grafu G_{i+1} o głębokości $d+1$. Następnie, algorytm zlicza wszystkie drzewa eliminacji grafu G_{i+1} głębokości d, które są, w pewnym sensie, „zgodne" z T; w przypadku, gdy liczba ta jest równa 0 algorytm odrzuca G. Poprawność tego kroku wynika z lematu 5.1.2, który zapewnia, że jeżeli G_{i+1} ma głębokość drzewową d, to przynajmniej jedno drzewo eliminacji G_{i+1} głębokości d jest zgodne z T. Jeżeli tak jest, algorytm konstruuje jedno z takich drzew sprawdzając, który z wierzchołków G_{i+1} może być ustawiony jako korzeń, pozostałą część drzewa konstruując rekurencyjnie. Cały ciężar algorytmu spoczywa na procedurze zliczającej drzewa eliminacji G_{i+1} głębokości d, które są zgodne z T. W tym celu, z wykorzystaniem technik algebraicznych (funkcje tworzące, zasada włączeń i wyłączeń) zliczane są pewne uogólnienia drzew eliminacji G_{i+1} głębokości d zgodnych z T, zwane w pracy *monsterami*. Formalna definicja monsterów jest dość skomplikowana, jej pełny opis zajmuje 2 strony rozdziału 5, więc nie będziemy jej tutaj przytaczać. Należy jednak podkreślić pomysłowość całego podejścia: poluzowanie pewnych warunków drzewa eliminacji zgodnego z T w definicji monstera pozwala zliczać monstery o pewnych cechach, które finalnie pozwalają zliczyć te, które są drzewami eliminacji G_{i+1} głębokości d zgodnymi z T. Algorytm probabilistyczny bazuje na algorytmie deterministycznym. Aby osiągnąć czas i pamięć liniowego rzędu względem n, w algorytmie tym dokonuje się kilku istotnych modyfikacji: między innymi zastępuje się iteratywną kompresję schematem kontrakcji Bodlaendera oraz procedurę testującą kandydatów na korzeń techniką *color coding* (zastosowanie to w istotny sposób korzysta z wyniku poprzedniej sekcji, że każdy minimalny graf o głębokości drzewowej d ma $d^{O(d)}$ wierzchołków). Wynik tej części rozprawy jest bardzo techniczny, na uwagę zasługuje bardzo szeroki wachlarz narzędzi wykorzystanych w projektowaniu opisanych powyższej algorytmów.

Rozdział 6: struktura grafów o dużej szerokość ścieżkowej. Przedmiotem badawczym rozdziału 6, opartego na wspólnej pracy z Carlą Groenland, Gwenaëlem Joretem i Bartoszem Walczakiem, jest struktura grafów o dużej szerokości ścieżkowej. Punktem startowym badań była hipoteza Kawarabayashiego i Rossmana, która zakładała, że dla pewnej stałej c każdy graf o szerokości ścieżkowej k^c ma szerokość drzewową $\Omega(k)$ lub zawiera jako podgraf subdywizję pełnego drzewa binarnego wysokości $\Omega(k)$. Główne wyniki rozdziału 6 dowodzą tej hipotezy dla stałej $c=2$ oraz wykazują, że stała ta jest możliwie najlepsza. Dowód hipotezy, chociaż w miarę krótki, jest bardzo pomysłowy i elegancki. Punktem startowym jest rekurencyjna definicja rodzin grafów $(\mathcal{T}_k)_{k=0}^{\infty}$: $\mathcal{T}_0$ zawiera wszystkie grafy spójne, $\mathcal{T}_k$ zawiera te grafy spójne G, w których możemy znaleźć rozłączne zbiory wierzchołków V_1, V_2, V_3 o tych własnościach, że $G[V_1]$, $G[V_2]$, $G[V_3]$ są w klasie $\mathcal{T}_{k-1}$ oraz każde dwa grafy spośród $G[V_1]$, $G[V_2]$, $G[V_3]$ można połączyć ścieżką w G omijającą trzeci graf tej rodziny. Dla tak zdefiniowanej rodziny grafów $\mathcal{T}_k$ autorzy dowodzą, że każdy graf z $\mathcal{T}_k$ ma szerokość ścieżkową co najmniej k oraz zawiera jako podgraf subdywizję pełnego drzewa binarnego wysokości k. Dowód głównego twierdzenia opiera się na na analizie specjalnej, spełniającej pewne warunki spójności, dekompozycji drzewowej (T,β) grafu G szerokości $k-1$. Jeżeli G zawiera graf z $\mathcal{T}_k$ jako podgraf, G zawiera subdywizję drzewa pełnego wysokości k. W przeciwnym przypadku, G nie może zawierać trzech rozłącznych podgrafów z klasy $\mathcal{T}_{k-1}$ w konfiguracjach (względem dekompozycji (T,β)) umożliwiających skonstruowanie w G podgrafu z klasy $\mathcal{T}_k$. Brak takich konfiguracji umożliwia „skompresowanie" dekompozycji drzewowej (T,β) do dekompozycji ścieżkowej o szerokości $O(k^2)$. Drugi wynik tego rozdziału zawiera konstrukcję grafu o szerokości ścieżkowej $\geqslant Ck^2$, dla pewnej stałej $C>0$, który ma szerokość drzewową $\leqslant (k-1)$ i który nie zawiera subdywizji drzewa pełnego wysokości k. Wynik ten pokazuje, że stała $c=2$ w dowodzie hipotezy Kawarabayashiego i Rossmana nie może zostać poprawiona.

Rozdział 7: dekompozycje grafów o ograniczonym największym średnim stopniu. Głównym wynikiem rozdziału 7, bazującego na pracy wspólnej z Marcinem Smulewiczem, jest twierdzenie orzekające, że dla każdej liczby naturalnej k wierzchołki dowolnego grafu G o największym średnim stopniu d można podzielić na dwa zbiory, które w grafie G indukują graf o liczbie kolorującej co najwyżej k oraz graf o największym średnim stopniu co najwyżej $d - k$. W szczególnych przypadkach, gdy $k = 1$ ($k = 2$, odpowiednio), twierdzenie to zapewnia, że z każdego grafu można usunąć zbiór niezależny (las, odpowiednio), obniżając największy średni stopień grafu co najmniej o 1 (o 2, odpowiednio). Dowód powyższego twierdzenia opiera się na konstrukcji odpowiedniej sieci przepływowej pozwalającej obliczać maksymalny średni stopień grafu oraz na badaniu własności ich przepływów maksymalnych. Dodatkowo, rozdział ten zawiera kilka przykładów zastosowań powyższego twierdzenia. W pierwszej kolejności autor wykorzystuje je do szacowania średnicy grafów rekonfiguracji pewnych kolorowań grafów o największym średnim stopniu ograniczonym przez k, uogólniając wcześniej znane wyniki Eibena i Feghali szacujące średnicę grafów rekonfiguracji zwykłych $(k + 2)$-kolorowań na grafy rekonfiguracji pewnych H-kolorowań i kolorowań cyrkularnych. Wśród kolejnych zastosowań autor wymienia szereg ciekawych rezultatów dekompozycyjnych dotyczących grafów planarnych. Zastosowania te świadczą o wadze i uniwersalności głównego twierdzenia udowodnionego w tym rozdziale.

Ocena rozprawy

Przedstawiona do recenzji praca doktorska wnosi istotny wkład w rozwój strukturalnej teorii grafów, a więc w obszar, który jest aktualnie bardzo intensywnie badany. Niewątpliwym walorem przedstawionej do oceny pracy jest jej spójność tematyczna. Autor dokładnie przebadał zależności zachodzące pomiędzy podstawowymi parametrami grafowymi, takimi jak szerokość drzewowa, głębokość drzewowa, czy szerokość ścieżkowa. Praca zawiera szereg głębokich wyników, a część z nich istotnie poprawia rezultaty bądź też rozwiązuje hipotezy postawione przez innych badaczy zajmujących się podobnymi zagadnieniami. Niewątpliwie cała praca dowodzi, że autor głęboko przebadał tę część strukturalnej teorii grafów, i w rezultacie przyczynił się do wyraźnego postępu w kierunku lepszego zrozumienia strukturalnych i algorytmicznych własności grafów o ograniczonych parametrach drzewowych i ścieżkowych.

Wyniki rozprawy zostały opublikowane w bardzo dobrych czasopismach naukowych (ACM Transactions on Algorithms, SIAM Journal on Discrete Mathematics oraz The Electronic Journal of Combinatorics) oraz materiałach pokonferencyjnych tak prestiżowych konferencji informatycznych jak SODA (dwukrotnie) czy ESA. Miejsca te świadczą o dużym znaczeniu i wadze uzyskanych wyników.

Sama praca jest bardzo dobrze zredagowana, wyniki zaprezentowane są w sposób przejrzysty i czytelny, z obszernym odniesieniem do rezultatów uzyskanych przez innych badaczy.

Konkluzja

Uważam, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia z dużym naddatkiem wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i stanowi podstawę nadania mgr Wojciechowi Nadarze stopnia naukowego doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie informatyka. Biorąc pod uwagę bardzo wysoką jakość uzyskanych w niej wyników, ich oryginalność oraz znaczenie, wnioskuję o wyróżnienie tej rozprawy.

Tomasz Krawczyk