

Warszawa, 26 lipca 2023 r.

dr hab. inż. Konstanty Junosza-Szaniawski, prof. PW
Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych
Politechnika Warszawska

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Wojciecha Nadary

“Graph Width Parameters. Dependencies, Algorithms and Decompositions.”

Omówienie zawartości rozprawy

Rozprawa dotyczy strukturalnej teorii grafów, dynamicznie rozwijającej się części teorii grafów, która stara się zbadać i wyjaśnić właściwości, które mogą być wykorzystane w konstrukcji efektywnych algorytmów grafowych. Sztandarowym przykładem jest szerokość drzewowa. Powstało bardzo wiele efektywnych algorytmów parametryzowanych szerokością drzewową. Innym przykładem intensywnie badanego parametru użytecznego do konstrukcji algorytmów jest szerokość ścieżkowa. Rozprawa koncentruje się na podobnym, ale dużo mniej zbadanym parametrze, jakim jest głębokość drzewowa, oraz jego zależnościach z wymienionymi parametrami. Rozprawa zawiera również wyniki dotyczące zależności szerokości drzewowej i ścieżkowej oraz maksymalnego średniego stopnia w grafie.

Rozprawa opiera się na następujących publikacjach:

- *Improved Bounds for the Excluded-Minor Approximation of Treedepth*, współaut.: Wojciech Czerwiński i Marcin Pilipczuk, opublikowana w SIAM Journal on Discrete Mathematics, Volume 35, (rozdział 3).
- *Efficient fully dynamic elimination forests with applications to detecting long paths and cycles* współaut.: Jiehua Chen, Wojciech Czerwiński, Yann Disser, Andreas Emil Feldmann, Danny Hermelin, Michał Pilipczuk, Marcin Pilipczuk, Manuel Sorge, Bartłomiej Wróblewski i Anna Zych-Pawlewicz, opublikowane i zaprezentowane na SODA2021, (rozdział 4).
- *Computing Treedepth in Polynomial Space and Linear FPT Time* współaut.: Michał Pilipczuk i Marcin Smulewicz, opublikowane i zaprezentowane na ESA 2022, (rozdział 5).
- *Approximating Pathwidth for Graphs of Small Treewidth*, współaut.: Carla Groenland, Gwenaël Joret i Bartosz Walczak, opublikowane w published in ACM Transactions on Algorithms Volum 19, Issue (2023), (rozdział 6).
- *Decreasing the Maximum Average Degree by Deleting an Independent Set or a d -Degenerate Subgraph*, współaut.: Marcin Smulewicz, opublikowane w The Electronic Journal of Combinatorics Volume 29, Issue 1 (2022), (rozdział 7).

Głównym wynikiem rozdziału 3 (jeśli nie całej rozprawy) jest twierdzenie, że każdy graf o zadanej szerokości i zadanej głębokości drzewowej zawiera odpowiednio duże drzewo o maksymalnym stopniu 3. Równoważnie dla każdego grafu o odpowiednio dużej głębokości drzewowej jego szerokość drzewowa jest odpowiednio duża lub graf zawiera odpowiednio duże drzewo o maksymalnym stopniu 3. W konsekwencji każdy graf o odpowiednio dużej głębokości drzewowej i odpowiednio małej szerokości drzewowej zawiera pełne drzewo binarne lub ścieżkę odpowiednich rozmiarów. Wymienione twierdzenie w istotny sposób poprawia twierdzenie autorstwa Kawarabayashi i Rossman przez obniżenie wartości, jaka kryje się pod sformułowaniem odpowiednia duża głębokość drzewowa. Te wyniki pozwoliły na konstrukcję aproksymacyjnego algorytmu znajdującego dekompozycję drzewową odpowiedniego rozmiaru. To z kolei pozwoliło na poprawę dolnego oszacowania (z $k^{190} \cdot p(\log k)$ na $k^{19} \cdot p(\log k)$) na głębokość drzewową, która wymusza liczbę kolorów k w liniowym kolorowaniu grafu.

Rozdział 4 zawiera oszacowanie na liczbę wierzchołków w grafie o zadanej głębokości drzewowej, którego właściwy podgraf ma mniejszą głębokość drzewową. Oszacowanie to poprawia w istotny sposób wynik Dvoraka i in. Stanowi również istotny element w konstrukcji algorytmów przedstawionych w kolejnym rozdziale.

Głównym wynikiem rozdziału 5 jest dokładny algorytm, który dla danego grafu G i liczby d znajduje las eliminujący odpowiadający głębokości drzewowej d lub odpowiada, że głębokość drzewowa grafu G jest większa od d . Ponadto jest przedstawiona zrandomizowana wersja algorytmu o mniejszej złożoności pamięciowej i czasowej, kosztem błędu fałszywej negatywnej odpowiedzi z ograniczonym prawdopodobieństwem.

Rozdział 6 zawiera twierdzenie, które mówi, że każdy graf o szerokości drzewowej $t-1$ ma szerokość ścieżkową nie większą niż $th+1$ lub zawiera podpodział pełnego drzewa binarnego wysokości $h+1$. Twierdzenie to dowodzi hipotezę autorstwa Kawarabayashi i Rossman.

Głównym wynikiem rozdziału 7 jest twierdzenie, które mówi, że dowolny graf G o średnim maksymalnym stopniu większym równym k może być podzielony na dwa indukowane podgrafy, z których jeden jest grafem $(k-1)$ -zdegenerowanym, a drugi ma średni maksymalny stopień mniejszy o k niż graf G . Twierdzenie to ma liczne konsekwencje dla grafów rzadkich, np. dla grafów planarnych o dużej talii.

Ocena wyników

Rozprawę oceniam bardzo wysoko. Zawiera kilka istotnych wyników, osiągniętych nietrywialnymi metodami. Otrzymane zależności między szerokością drzewową, głębokością drzewową oraz szerokością ścieżkową są bardzo ciekawe i ważne, zwłaszcza w kontekście algorytmiki. Doktorant nie tylko umie posługiwać się wyrafinowanymi i różnorodnymi metodami strukturalnej teorii grafów, ale również potrafi je twórczo modyfikować, rozwijać i adaptować do pożądanых zastosowań. Wyniki rozprawy w istotny sposób poprawiają znane z literatury rezultaty. O ich ważności i aktualności świadczy również wysoka cytowalność.

(doliczyłem się co najmniej 11 publikacji). Wyniki zostały opublikowane w renomowanych czasopismach i konferencjach. Bardzo pozytywnie również oceniam różnorodność zespołów współautorów publikacji, na których oparta jest rozprawa.

Jakość redakcji

Rozprawa zredagowana jest bardzo porządnie. Układ pracy jest bardzo przejrzysty i ułatwia przyswojenie jej zawartości. Bardzo cenne są równoważne sformułowania podane po definicjach i twierdzeniach, które utwierdzają czytelnika w prawidłowym zrozumieniu poruszanych, skądinąd nie trywialnych, pojęć i wyników. Znalazłem tylko drobne i nieliczne potknięcia redakcyjne:

Strona 20: podpunkt 4 „ $td(G)$ ” -> „ $td(C)$ ”

Strona 20: akapit zaczynający się od „a complete binary tree..” powinien być wcześniej, przed pierwszym użyciem definiowanych pojęć.

Strona 22: definicja 3.1.2 formalnie powinna zawierać definicję listy dla drzewa pustego.

Konkluzja

Uważam, że przedstawiona rozprawa z naddatkiem spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnioskuje o dopuszczenie mgr Wojciecha Nadary do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.



Konstanty Junosza-Szaniawski

