dr hab. Mateusz Kwaśnicki
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Wrocław, 5 sierpnia 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Tomasza Gałązki
pt. „Martingale methods in selected topics of harmonic analysis"
napisanej pod kierunkiem dr. hab. Adama Osękowskiego
na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Rozprawa doktorska mgr. Tomasza Gałązki dotyczy nierówności martyngałowych z optymalnymi stałymi i mieści się w obszarze analizy harmonicznej. Badania dotyczące oszacowań norm martyngałów prowadzone były już w połowie XX wieku, m.in. przez Dooba i Kołmogorowa, zaś technika wykorzystywana w omawianej rozprawie — metoda funkcji Bellmana — ma swoje źródło głównie w niewiele późniejszych pracach Burkholdera. Od tego czasu dziedzina ta jest aktywnie rozwijana przez licznych matematyków. W ostatnich dwóch dekadach niekwestionowanym liderem badań w tym kierunku jest promotor przewodu doktorskiego mgr. Tomasza Gałązki, dr hab. Adam Osękowski.

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska ma formę klasycznej dysertacji i liczy 75+viii stron tekstu. Składa się z rozdziału wstępnego i czterech rozdziałów głównych, prezentujących poszczególne tezy rozprawy. Choć poruszane w nich zagadnienia są ściśle ze sobą związane, rozdziały te są w dużej mierze niezależne od siebie. Całość uzupełniona jest liczącym 49 pozycji spisem literatury. Jedynie wyniki rozdziału drugiego ukazały się w publikacji naukowej (w cenionym czasopiśmie *Bull. London Math. Soc.*; w rozprawie artykuł ten opisany jest kwalifikatorem *to appear*, ale ukazał się on w wydaniu z sierpnia 2021 roku). Nie ulega jednak wątpliwości, że pozostałe tezy rozprawy również zostaną zawarte w artykułach naukowych. Wszystkie wyniki opisane w rozprawie zostały uzyskane wraz z promotorem, a wyniki rozdziału drugiego również z Rodrigiem Bañuelosem z Purdue University w USA.

Mgr Tomasz Gałązka jest oprócz tego współautorem trzech artykułów naukowych (opublikowanych w cenionych czasopismach *Linear Algebra Appl.*, *Illinois J. Math.* oraz *Proc. Amer. Math. Soc.*). Drugim autorem tych prac jest promotor, w jednym przypadku współautorem jest Yahui Zuo z Central South University w Chinach.

W dalszej części recenzji krótko przedstawię główne tezy rozprawy, moją ocenę jej rangi naukowej, ocenę sposobu prezentacji uzyskanych wyników i konkluzję. Już w tym miejscu chciałbym jednak podkreślić, że omawianą rozprawę doktorską uważam za znakomitą.

Główne tezy rozprawy

Wprowadzenie. Jednym z podstawowych pojęć analizy harmonicznej jest transformata Hilberta. Jeszcze w latach dwudziestych XX w. M. Riesz udowodnił, że jest ona operatorem ograniczonym na przestrzeniach L^p. Dokładną wartość normy operatorowej transformaty Hilberta na L^p wyznaczył jednak dopiero Pichorides w 1972 r. Pokrewne zagadnienia badane były później przez wielu autorów, m.in. ze względu na liczne zastosowania w innych obszarach matematyki.

MK

W dowodzeniu oszacowań norm transformat Hilberta i Riesza oraz pokrewnych operatorów całki singularnej nadzwyczaj skuteczne okazały się metody martyngałowe, wprowadzone przez Burkholdera jeszcze w latach sześćdziesiątych XX w. W szczególności właśnie w ten sposób uzyskano wiele wyników dotyczących *nierówności z optymalną stałą* — lub, innymi słowy, dokładnych wartości norm rozważanych operatorów — będących motywem przewodnim rozprawy doktorskiej mgr. Tomasza Gałązki.

Samo wyznaczanie najlepszej stałej w omawianych tu nierównościach ma czasem charakter niemal sportowy, bez istotnych zastosowań w innych działach matematyki (wyjątkiem były chyba wyłącznie związki z odwzorowaniami kwazikonforemnymi). Mimo to, moim zdaniem, badania nad optymalnymi stałymi są wartościowe: pozwalają one lepiej zrozumieć strukturę dowodzonych oszacowań, a opracowane w tym celu metody dowodowe znajdują zastosowania w innych zagadnieniach analizy harmonicznej.

Należy też podkreślić, że są to badania wymagające unikatowych zdolności analitycznych. W największym skrócie oszacowania norm operatorów całki singularnej uzyskuje się z odpowiednich nierówności martyngałowych, tych zaś dowodzi się przy pomocy *metody funkcji Bellmana*. Klasycznym przykładem nierówności martyngałowej jest udowodniona przez Burkholdera nierówność:

$$\mathbb{E}|Y_n|^p \leqslant C_p \mathbb{E}|X_n|^p,$$

gdzie X_n i Y_n są martyngałami startującymi z zera, spełniający warunek *różniczkowego podporządkowania*:

$$|Y_i - Y_{i-1}| \leqslant |X_i - X_{i-1}|.$$

Analogiczną nierówność można sformułować dla martyngałów z czasem ciągłym, a także w wersji z normą słabej przestrzeni $L^{p,\infty}$ po lewej stronie.

Aby udowodnić nierówność Burkholdera, „wystarczy" skonstruować funkcję $U(x,y)$ o następujących własnościach:

— $U(0,0) \leqslant 0$;
— $U(x,y) \geqslant |y|^p - C_p^p |x|^p$;
— $U(X_n, Y_n)$ jest nadmartyngałem.

Burkholder odkrył, że funkcja:

$$U(x,y) = p\left(1 - \frac{1}{p^*}\right)^{p-1} \big(|y| - (p^* - 1)|x|\big)\big(|x| + |y|\big)^{p-1}$$

ma wszystkie żądane własności i wobec tego nierówność Burkholdera zachodzi ze stałą $C_p = p^* - 1$, gdzie $p^* = \max\{p, \frac{p}{p-1}\}$. Aby uzasadnić, że stała ta jest optymalna, można podać odpowiednie pary martyngałów X_n i Y_n, dowodzące, że nierówność z żadną stałą $C_p < p^* - 1$ nie jest prawdziwa.

W dowodach oszacowań stanowiących główne wyniki omawianej rozprawy ogólna idea jest dość podobna do tej zarysowanej powyżej, ale potrzebne są bardzo istotne modyfikacje. W każdym przypadku wymagana jest inna *funkcja specjalna* U, często o dużo bardziej skomplikowanej postaci. W rozdziale 2.5 rozprawy przystępnie zarysowano metody wykorzystywane przy wyznaczaniu jawnych wzorów na potrzebną funkcję specjalną U.

MC

Klasyczna nierówność Burkholdera. Naszkicowany wyżej dowód nierówności Burkholdera pochodzi właśnie od Burkholdera. Niedawno Nazarov, Treil i Volberg przedstawili inny dowód, wykorzystujący dualność i inną funkcję specjalną U. Dowód ten nie pozwalał jednak uzyskać najmniejszej możliwej stałej C_p. Bañuelos i promotor ocenianej rozprawy uzyskali analogiczny dowód z optymalną stałą, ale wykorzystana przez nich czteroargumentowa funkcja specjalna U była nader skomplikowana. W rozdziale drugim rozprawy przedstawiono dowód z optymalną stałą i prostszą, dwuargumentową funkcją specjalną U. Wynik ten — w kilku różnych sformułowaniach — jest treścią twierdzeń 2.1–2.5.

Rezultatem rozdziału drugiego rozprawy jest więc nowy dowód klasycznego wyniku. Można ten rozdział traktować jako łagodne wprowadzenie do kolejnych części rozprawy, ale już tu widać matematyczny kunszt autora: wykorzystana tu funkcja specjalna U jest dana w uwikłany sposób i jej odgadnięcie wymagało szeregu działań (opisanych w rozdziale 2.5).

Transformaty martyngałowe z nieograniczonymi mnożnikami. Jednym z najważniejszych sposobów uzyskiwania martyngałów różniczkowo podporządkowanych jest *transformata martyngałowa*. W przypadku dyskretnym martyngał Y_n jest transformatą martyngału X_n, jeśli

$$Y_i - Y_{i-1} = H_i(X_i - X_{i-1}),$$

gdzie H_i jest ciągiem przewidywalnym (tj. H_i jest mierzalna względem σ-ciała $\mathcal{F}_{i-1}$). Jeśli $|H_i| \leqslant 1$ z prawdopodobieństwem jeden, to martyngał Y_n jest różniczkowo podporządkowany martyngałowi X_n.

Rozdział 3 rozprawy przedstawia nierówności z optymalnymi stałymi w przypadku, gdy ciąg H_n nie jest ograniczony, ale $H^* = \sup_n |H_n|$ ma skończony moment rzędu r. Jeśli $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, to

$$\|Y_n\|_p \leqslant C_{p,q,r} \|X_n\|_q \|H^*\|_r,$$

gdzie, jak zwykle, $\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$. Wyniki tego rozdziału, zebrane w twierdzeniach 3.1–3.3, podają optymalne wartości stałych $C_{p,q,r}$ i, podobnie jak rezultaty omawiane w kolejnych rozdziałach, są oryginalne. W dowodach oszacowań wykorzystano znane wcześniej funkcje specjalne, ale brak różniczkowego podporządkowania wprowadza dodatkowe komplikacje. Z kolei dowód optymalności stałych wymaga skonstruowania nieoczywistych przykładów transformat martyngałowych.

Transformaty Riesza na zwartych grupach Liego. Nierówność Burkholdera (dla martyngałów z czasem ciągłym) pociąga za sobą oszacowania norm klasycznych transformat Hilberta i Riesza na przestrzeniach L^p. W przypadku przestrzeni euklidesowej transformaty te nie są operatorami ograniczonymi z L^p do L^q lub $L^{q,\infty}$ jeśli $p \neq q$. Jednak na grupach o skończonej mierze (np. na okręgu lub na torusach) transformaty te przekształcają L^p w L^q oraz $L^{q,\infty}$, jeśli tylko $p \geqslant q$.

Rozdział czwarty omawianej rozprawy doktorskiej poświęcony jest wyznaczeniu normy operatorowej transformat Hilberta i Riesza z przestrzeni L^p w przestrzeń $L^{q,\infty}$, czyli optymalnym oszacowaniom słabego typu między przestrzeniami L^p o różnych wykładnikach. Potrzebna nierówność martyngałowa jest treścią twierdzenia 4.7. Główny rezultat zaprezentowany jest wpierw w twierdzeniu 4.1 dla transformaty Hilberta na okręgu, a później w twierdzeniu 4.9 dla transformat Riesza na

MW

ogólnych zwartych grupach Liego. Pokrewny wynik dla dwóch rodzajów transformat Riesza na sferze jest treścią twierdzenia 4.11.

Holomorficzna nierówność Feffermana. Fefferman wykazał, że przestrzeń BMO funkcji o ograniczonych średnich oscylacjach jest przestrzenią dualną do przestrzeni Hardy'ego H^1. W szczególności wynika stąd, że:

$$\left| \int \overline{f} g \right| \leqslant C \|f\|_{H^1} \|g\|_{BMO}$$

dla pewnej stałej C. W rozdziale 5 omawianej rozprawy doktorskiej podana jest optymalna wartość $C = \sqrt{e^2+1}$ w przypadku, gdy funkcje f i g są wartościami brzegowymi funkcji holomorficznych w dysku jednostkowym (czyli w kontekście zespolonych przestrzeni Hardy'ego).

Dowód tego wyniku, stanowiącego treść twierdzenia 5.1, z pozoru jest podobny do argumentów używanych w poprzednich rozdziałach. Wykorzystana jest odpowiednia nierówność martyngałowa, sformułowana w twierdzeniu 5.2, a na potrzeby dowodu tej nierówności skonstruowana jest odpowiednia funkcja specjalna. Konstrukcja tej funkcji jest jednak niezmiernie skomplikowana i wykorzystuje zaawansowane metody analizy zespolonej (*disk envelopes*, funkcje pluriharmoniczne). Równocześnie budowany jest przykład, który dowodzi optymalności stałej $C = \sqrt{e^2+1}$.

Ocena rangi naukowej uzyskanych wyników

Rozprawa doktorska mgr. Tomasza Gałązki zawiera wiele nowych rezultatów, istotnie rozszerzających stan wiedzy w aktywnie rozwijanej dziedzinie matematyki. Autor nader sprawnie posługuje się zaawansowanymi narzędziami z różnych obszarów matematyki: teorii prawdopodobieństwa (martyngały, rachunek Itô), równań różniczkowych (równanie Monge'a–Ampere'a), geometrii różniczkowej (grupy Liego), analizy harmonicznej (całki singularne, przestrzenie Hardy'ego i BMO) i analizy zespolonej (zespolone przestrzenie Hardy'ego, funkcje pluriharmoniczne).

W ocenianej rozprawie nie znalazłem istotnych matematycznych usterek. Jedyny — drobny i łatwy do naprawienia — błąd dotyczy braku odwołania do odpowiedniej zasady Phragmena–Lindelöfa przy stosowaniu zasady maksimum dla funkcji harmonicznych w obszarach nieograniczonych w dowodach lematu 4.4 i twierdzenia 4.6.

Jestem pod dużym wrażeniem rozległej wiedzy mgr. Tomasza Gałązki, jego precyzji w konstruowaniu dowodów oraz ilości uzyskanych wyników.

Nie umiem kompetentnie ocenić możliwości zastosowania rezultatów przedstawionych w rozprawie w dalszych badaniach lub w innych obszarach matematyki; jak opisano to w następnej części tej recenzji, autor rozprawy nie ułatwia realizacji tego zadania. Mam obawy, że dokładne wartości najlepszych stałych w różnych oszacowaniach dyskutowanych w rozprawie pozostaną jedynie ciekawostką i będą miały umiarkowany wpływ na dalszy rozwój dyscypliny. Nie mam jednak najmniejszych wątpliwości, że podczas prac nad rozprawą doktorską mgr Tomasz Gałązka udowodnił umiejętność samodzielnego rozwiązywania bardzo skomplikowanych problemów matematycznych oraz zdobył wiedzę i umiejętności, które pozwolą mu z sukcesami pracować w wielu obszarach szeroko rozumianej analizy matematycznej.

MK

Ocena sposobu prezentacji wyników

Rozprawa doktorska mgr. Tomasza Gałązki jest znakomicie zredagowana, napisana poprawnym językiem i przygotowana bardzo starannie od strony matematycznej. Znalazłem ledwie kilka błędów redakcyjnych i nieścisłości. Zasługuje to na szczególne podkreślenie, bowiem rozprawa składa się w większości z pracochłonnych rachunków i niebanalnych rozumowań.

Wspomniane wyżej drobne usterki to m.in.: nadmiernie szkicowe opisy niektórych elementów dowodu (np. przybliżania całki sumami Riemanna w dowodzie twierdzenia 2.8, zastosowania twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej w dowodzie lematu 4.4); drobne nieścisłości (np. brak założeń $q > 0$ i $a\delta < 1$ w kroku 1 dowodu lematu 3.6, brak domknięcia zbioru S^+ w końcówce dowodu lematu 4.4, $|(1-\delta)|y| - \delta|$ zamiast $((1-\delta)|y| - \delta)_+$ we wzorze (4.3.3) i następujących po nim rachunkach, *pointwise* zamiast *almost surely* na s. 58), pojedyncze literówki (np. *calculation are* na s. 26, brak *lines* po *along similar* na s. 38, nadmiarowe *an* w *enjoys an appropriate boundedness* na s. 38, $U_\beta(0,\beta)$ oraz $\mathcal{U}(0,\beta)$ zamiast $\mathcal{U}_\beta(0,\beta)$ na s. 52, brak daty w pozycji [25] w spisie literatury).

Struktura omawianej rozprawy doktorskiej została już opisana wyżej i jest bardzo klarowna. Równie wysoko oceniam sposób prezentacji wyników i organizację dowodów. Moje jedyne zastrzeżenie dotyczy niedostatecznego osadzenia pracy w literaturze: opis tła historycznego jest stosunkowo ubogi, a współczesne badania są niemal zupełnie pominięte. Świadczą o tym na przykład bardzo nieliczne odniesienia do artykułów naukowych z ostatnich dwóch dekad: zaledwie trzy w rozdziale wstępnym (dwa z nich to artykuły promotora), sześć w — najlepszym w tej kategorii — rozdziale drugim, trzy w rozdziale trzecim (wśród nich znów dwa artykuły promotora) i dwa w rozdziale piątym. W rozdziale czwartym takich odwołań brak, brakuje też komentarza w sprawie normy operatorowej transformaty Hilberta z przestrzeni L^p w przestrzeń L^q (zamiast słabej przestrzeni $L^{q,\infty}$ rozważanej w tym rozdziale). Rozprawa dużo by zyskała, gdyby wstęp do każdego z głównych rozdziałów wyglądał tak jak w rozdziale drugim.

Mimo powyższego zastrzeżenia sposób prezentacji wyników oceniam bardzo dobrze. Powyższa uwaga oczywiście też w żaden sposób nie obniża mojej bardzo wysokiej oceny rangi naukowej rozprawy mgr. Tomasza Gałązki.

Konkluzja

Dysertacja mgr. Tomasza Gałązki z naddatkiem spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Stanowi ona oryginalne rozwiązanie szeregu trudnych problemów naukowych. Stopień zaawansowania i zróżnicowania zastosowanych technik dowodowych ukazuje zdolność mgr. Tomasza Gałązki do prowadzenia samodzielnych badań naukowych oraz jego rozległą wiedzę teoretyczną w dyscyplinie.

Ranga wyników uzyskanych w rozprawie doktorskiej mgr. Tomasza Gałązki jest w mojej ocenie dostatecznie wysoka, bym bez wahania wnioskował o wyróżnienie tej rozprawy.

Mateusz Kwaśnicki

Mateusz Kwaśnicki