UAM

Uniwersytet im A.Mickiewicza w Poznaniu

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Poznańskiego 4,
61-614 Poznań

Prof.dr hab Leszek Skrzypczak
tel.: +48-61-829-54-73
fax: +48-61-829-53-15
e-mail: lskrzyp@amu.edu.pl

Poznań 12.09.2022

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Tomasza Gałązki
Martingale methods in selected topics of harmonic analysis

Praca doktorska mgra Tomasza Gałązki dotyczy teorii martyngałów i zastosowania metod martyngałowych w analizie harmonicznej na przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ oraz na zwartych grupach Liego. Wspomniane zastosowania dotyczą transformacji Riesza i Hilberta, oszacowań Littlewooda-Paley'a oraz nierówności Feffermana związanej z dualnością H^1-BMO.

Wyniki prezentowane w pracy są rezultatem współpracy mgra Gałązki z R. Bañelosem z Purdue University and Adamem Osękowski, który jest promotorem recenzowanej rozprawy. Przy czym współpraca z R. Bañuelosem dotyczyła jedynie wyników prezentowanych w rozdziale drugim tzn. twierdzenia Burkholdera i jego zastosowań. Z informacji zawartych w Math.Sci.Net wynika, że mgr T.Gałązka jest autorem łącznie 4 publikacji. Wszystkie prace są publikacjami współautorskimi a współautorem wszystkich jest Adam Osękowski. Współautorem jednej z nich oprócz A.Osękowskiego jest wspomniany R.Bañuelos, a ostatniej Y.Zhuo. Artykuły te ukazały się znanych i dobrych czasopismach (Bull. Lond. Math. Soc., Proc. Amer. Math. Soc., Linear Algebra Appl., Illinois J. Math.). Baza nie wspomina o cytowaniach tych prac, jednak jest to rzeczą naturalną, gdyż ukazały się one w latach 2021-2022.

Rozprawa liczy 75 stron i składa się z pięciu rozdziałów, z których pierwszy ma charakter wstępny i omawia dosyć pobieżnie stosowane w pracy pojęcia i potrzebne znane fakty. Rozdział drugi i trzeci poświęcone są ograniczoności transformacji martyngałowych z przy czym rozdział 2 dotyczy transformacji z ograniczonym ciągiem transformującym, natomiast w rozdziale trzecim to założenie zostaje zastąpione założeniem, że ciąg tranformujący jest całkowalny z pewną potęgą. Wielkość martyngałów jest mierzone w sensie silnych i słabych norm L_p, $1 \leqslant p\infty$. Jeżeli $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ jest martyngałem z czasem dyskretnym to

$$\|f\|_{L^p} = \sup_n \|f_n\|_{L^p} \qquad \text{i} \qquad \|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_n \|f_n\|_{L^{p,\infty}},$$

przy czym w tym drugim przypadku zamiast standardowej normy lorentzowskiej

$$\|f_n\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\lambda>0}\left(\lambda^p\mathbb{P}(|f_n| > \lambda)\right)^{1/p},$$

stosuje się równoważną normę

$$|||f_n|||_{L^{p,\infty}} = \sup_A\left\{\mathbb{P}(A)^{1/p-1}\int_A |f_n|d\mathbb{P}\right\}. \tag{1}$$

Użycie innej równoważnej normy ma duże znaczenie dla omawianych badań, gdyż w zasadzie we wszystkich przypadkach dowodzi się optymalności stałych. W podobny sposób definiujemy normy martyngałów z czasem ciągłym.

Rozdział 2 oparty jest na wspomnianym wyżej wspólnym artykule z R.Bañuelos i A.Osękowskim. Klasyczne twierdzenie Burkholdera dotyczy martyngałów z czasem dyskretnym i mówi o ograniczoności transformacji martyngałowej w przestrzeniach L_p dla $1 < p < \infty$. Twierdzenie to zostało udowodnione w roku 1966, a jego wersja z dokłądną stałą w 1984roku. W latach 1990-tych G.Wang uogólnił to twierdzenie na martyngały z czasem ciągłym. Dowód twierdzenia Burkholdera, zarówno ten pierwszy jak i alternatywny podany pracach Nazarova, Treila i Volberga, opiera się na konstrukcji pewnych funkcji specjalnych. R.Bañuelos i A.Osękowski w pracy opublikowanej w 2014 roku poprawili tą drugą metodę podając funkcję Belmanna prowadzącą do optymalnej stałej w nierówności Burkholdera dla wszystkich p, $1 < p < \infty$. W Rozdziale 2 rozprawy dokonano dalszego uproszczenia tej metody opierając konstrukcję na funkcji Belmanna dwóch zmiennych a nie czterech zmiennych co miało miejsce poprzedniej pracy. Precyzyjniej rzecz ujmując pokazano, że jeżeli X, Y i Z są lokalnymi martyngałami o wartościach w przestrzeni Hilberta oraz Y jest różniczkowo podporządkowany martyngałowi X. Wówczas dla każdego $1 < p < \infty$ oraz formy dwuliniowej $[Y, Z]_\infty$ dla martyngałów Y i Z mamy

$$\|[Y, Z]_\infty\|_1 \leqslant (p^* - 1)\|X\|_p\|Z\|_{p'},$$

gdzie p' jest wykładnikiem sprzężonym w sensie nierówności Höldera a $p^* = \max\{p, p'\}$. Poprzez dualność otrzymujemy

$$\|Y\|_p \leqslant (p^* - 1)\|X\|_p.$$

W Rozdziale 3 rozpatrywana jest transformacja martyngałowa przy założeniu, że ciąg transformujący nie jest ciągiem ograniczonym. Celem raz jeszcze jest wykazanie dokładnych oszacowań dla tranformacji martyngałowej t.j. udowodnienie nierówności

$$\|g\|_{L^p} \leqslant C_{p,q,r}\|f\|_{L^q}\|v^*\|_{L^r} \tag{2}$$
$$\|g\|_{L^{p,\infty}} \leqslant c_{p,q,r}\|f\|_{L^q}\|v^*\|_{L^r}, \tag{3}$$

gdzie g jest transformacją martyngałową martyngału f, a v ciągiem transformującym a $v*$ odpowiednią funkcją maksymalną. Martyngały te przyjmują wartości w ośrodkowej przestrzeni Hilberta. Zakładając, że $1 < p, q, r < \infty$ oraz że $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ podaje się numeryczne wartości stałych $C_{p,q,r}$ i $c_{p,q,r}$ zależne od p, q i r, przy czym dowodzi się ich optymalność. Norma użyta słabej przestrzeni Lebesgue'a $L^{p,\infty}$ w nierówności (3) nie jest zwyczajową normą Lorentza ale normą określoną przez wyrażenie (1). Wreszcie pokazuje się że analogiczne nierówności zachodzą dla martyngałów z czasem ciągłym przyjmujących wartości w ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Precyzyjniej rzecz ujmując powyższe nierówności zachodzą jeśli X i Y są martyngałami o wartościach w $\mathcal{H}$, H jest lewostronnie ciągłym procesem takim, że Y jest martyngałowo podporządkowany całce stochastycznej $H \cdot X$ procesu H względem X. Wtedy nierówności (2) i (3) zachodzą, jeśli zastąpimy g przez Y, f przez X oraz v^* przez funkcje maksymalną H^*.

Zasadniczym celem Rozdziału 4 jest badanie optymalności oszacowania normy transformacji Hilberta oraz jej wielowymiarowej wersji transformacji Riesza jako operatorów działających z przestrzeni L_p do słabej przestrzeni Lebesgue'a $L^{q,\infty}$ w przypadku $1 < q < p < \infty$. Rozpatruje się operatory działające na okręgu $\mathbb{T}$ na torusach $\mathbb{T}^d$, ogólniej na zwartych grupach Liego oraz na sferach Euklidesowych S^{d-1}. Podaje się formułę na normę tych operatorów, przy czym w przestrzeni docelowej raz jeszcze normę daną w postaci (1). Badanie normy tych operatorów z taką normą przestrzeni docelowej pojawiło się wcześniej w pracy Osękowskiego. Wyrażenie na normę operatora $C_{p,q}$ zależy jedynie od p jeśli $p \leqslant 2$ i od p oraz q jeśli $p > 2$. Pozwala to w przypadku $1 < p \leqslant 2$ wykorzystać oszacowanie przy $q = p$ udowodnione we wspomnianej pracy Osękowskiego. Transformata Riesza na zwartych grupach Liego jest określona poprzez operator Beltrami- Laplace'a związany z bi-niezmienniczą strukturą Riemannowską określoną na tej grupie. Natomiast na sferach rozpatruje się dwie wersje transformacji Riesza, tzw. cylindryczną transformację Riesza i kierunkową transformację Riesza. Ogólna idea dowodu bazuje na probabilistycznej interpretacji transformaty Riesza która jest zasługą R.S. Gundy'ego i N.Th.Varopoulosa oraz N.Arcossiego. Wpierw dowodzi się pewnej ogólnej nierówności martyngałowej dla ortogonalnych martyngałów związanych relacją różniczkowalnego podporządkowania a następnie wykorzystując interpretację probabilistyczną transformacji Riesza oraz wymienioną wyżej normę w przestrzeni docelowej uzyskuje się szukane oszacowanie korzystając z dualności. Dowód nierówności martyngałowej wykorzystuje subharmoniczne funkcje specjalne. Uzyskane wyrażenia $C_{p,q}$ na normę operatora są dokładne w przypadku okręgu i torusa, czego dowodzi się poprzez konstrukcję funkcji ekstremalnych.

Ostatni z rozdziałów, poświęcony jest dualności pomiędzy przestrzeniami Hardy'ego $H^1(\mathbb{T})$ oraz $BMO(\mathbb{T})$. Celem jest wykazanie, że optymalną stałą w nierówności

$$\left| \int_{\mathbb{T}} \overline{f(x)} g(x) d\mu \right| \leqslant C \|f\|_{H^1(\mathbb{T})} \|g\|_{BMO(\mathbb{T})},$$

gdzie $g \in ABMO(\mathbb{T}) = H^1(\mathbb{T}) \cap ABMO(\mathbb{T})$, $\int_{\mathbb{T}} g(x) d\mu = 0$ jest $C = \sqrt{e^2+1}$. W dowodzie wykorzystano metody analizy zespolonej funkcji wielu zmiennych (funkcje plurisubharmoniczne) oraz martyngały zespolone.

Rozprawa doktorska mgr Tomasza Gałązki jest moim zdaniem jednolita tematycznie. Zasadniczym celem wszystkich pięciu rozdziałów jest wykazanie nierówności gwarantujących ciągłość pewnych operatorów, przy czym za każdym razem udowadnia się, że stałe występujące w tych nierównościach są optymalne lub, że są optymalne przynajmniej w pewnych przypadkach. Nierówności te bądź mają charakter probabilistyczny i dotyczą transformaty martyngałowej, bądź też mają probabilistyczną interpretację np. nierówności dotyczące transformat Riesza i Hilberta. Zasadniczą metoda wykazywania optymalności tych nierówności wykorzystywaną w pracy jest metoda funkcji Bellmana. Metoda ta jest skutecznym narzędziem, które umożliwia powiązanie określonych rodzajów oszacowań powstających, w probabilistyce i analizie harmonicznej z istnieniem pewnej wklęsłej funkcji specjalnej spełniającej odpowiednie oszacowania. Jest to metoda wykorzystywana z powodzeniem w dowodzeniu optymalnych nierówności. Nie jest to metoda łatwa, wymaga pomysłowości oraz biegłości technicznej. Trzeba dobrać odpowiednią funkcję a następnie wykazać potrzebne własności.

W rozprawie wykorzystano przede wszystkim środki techniczne typowe dla probabilistyki i analizy stochastycznej. Jednak na tym arsenał wykorzystanych metod się nie kończy. I tak np. w rozdziale 5 wykorzystano elementy analizy zespolonej funkcji wielu zmiennych (funkcje plurisubharmoniczne) a we wcześniejszych rozdziałach funkcje (sub-)harmoniczne. Dowody wielu twierdzeń są długie i technicznie skomplikowane. Ich przeprowadzenie wymagało zarówno wiedzy matematycznej jak i pomysłowości.

Rozprawa jest napisana w stylu specjalistycznych artykułów naukowych, co nie ułatwia czytania osobom które nie są specjalistami zakresu teorii martyngałów. Niektóre rozumowania, biorąc pod uwagę to, że mamy do czynienia z rozprawą doktorską powinny być moim zdaniem rozszerzone. Powyższa uwaga dotyczy również wstępnego rozdziału pierwszego, w którym podano definicję pewnych elementarnych pojęć np. transformacji Fouriera natomiast pominięto wyjaśnienia pojęć bardziej zaawansowanych takich jak krzywizna Ricci. Co więcej nie wyjaśniono, czy założenie dotyczące ograniczoności z dołu tej krzywizny jest niezbędne aby poprawnie zdefiniować całkę Itô I_K (stona 5) oraz czy powinno być powtórzone w założeniach Twierdzenia 4.8.

Rozprawa napisana jest w języku angielskim i od strony językowej jest poprawna. Zauważyłem jedynie kilka drobnych nieistotnych usterek. Prezentowane wyniki opierają się na wspólnych pracach lub już opublikowanych artykułach, których współautorem jest promotor rozprawy dr hab. Adam Osękowski, a w jednym przypadku takze R.Bañulos.

Tematyka badań prezentowanych w rozprawie jest niewątpliwie aktualna, stosowane metody są technicznie zaawansowane i nowoczesne. Mgr Tomasz Gałązka wykazał się niewątpliwie szeroką wiedzą matematyczną oraz umiejętnością dowodzenia nowych twierdzeń. Uważam, że praca spełnia wszystkie ustawowe wymagania. Wnioskuję o dopuszczenie go do dalszych etapów postępowania.