Kraków, 14 sierpnia 2020r.

dr hab. Piotr Kalita, prof. UJ
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Tomasza Dębca nt.:

"Weak convergence methods for equations of mathematical physics and biology (Metody słabej zbieżności dla równań fizyki i biologii matematycznej)"

Oceniana rozprawa doktorska składa się z następujących czterech artykułów, których mgr Dębiec jest współautorem:

[1] T. Dębiec, P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, A. Tzavaras, Energy conservation for the Euler–Korteveg equations *Calc. Var. Partial Differential Equations* 57 (6): Art. 160, 2018.

[2] I. Akramov, T. Dębiec, J. Skipper, E. Wiedemann, Energy conservation for the compressible Euler and Navier–Stokes equations with vacuum *Anal. PDE* 13(3):789–9811, 2020.

[3] T. Dębiec, M. Doumic, P. Gwiazda, E. Wiedemann, Relative entropy method for measure solutions of the growth-fragmentation equation *SIAM J. Math. Anal.* 50(6):5811–5824, 2018.

[4] T. Dębiec, M. Schmidtchen, Incompressible limit for a two-species tumour model with coupling through Brinkman's law in one dimension *Acta Appl. Math.* praca w druku, 2020, https://doi.org/10.1007/s10440-020-00313-1.

Wyniki uzyskane we wszystkich czterech artykułach dotyczą jakościowych własności rozwiązań uogólnionych zagadnień brzegowo-początkowych dla ewolucyjnych równań cząstkowych opisujących pewne zagadnienia fizyki i biologii matematycznej. Prace [1] i [2] dotyczą zagadnień z mechaniki płynów, praca [3] - zagadnienia stosowanego w dynamice populacji, a praca [4] - zagadnienia modelującego wzrost nowotworów. Oceniane artykuły ukazały się w dobrych, bardzo dobrych, a w przypadku prac [1] i [2] znakomitych, czasopismach znajdujących się na liście JCR, zgodnie z ust. 2 art. 13 Ustawy z dn. 14 marca 2003 o stopniach naukowych i tytule naukowym. Na uwagę zasługuje to, że mgr Dębiec współpracuje z wieloma matematykami z różnych ośrodków, w tym zagranicznych: współautorami artykułów wchodzących w skład rozprawy jest, poza promotor pracy, aż siedmioro matematyków (w tym sześcioro spoza Polski), a żaden współautor nie występuje w więcej niż dwóch z czterech prac. Ponadto wśród współautorów artykułów wskazanych w rozprawie znajdują się światowej klasy specjaliści. Wskazuje to na dużą samodzielność mgra Dębca i łatwość nawiązywania współpracy i nie pozostawia miejsca na wątpliwości że wkład doktoranta w uzyskanie wyników jest istotny.

Nie mam zastrzeżeń do redakcji rozprawy. Załączony autoreferat (w polskiej i angielskiej wersji językowej) wskazuje na główne uzyskane wyniki, umieszcza je w szerszym kontekście oraz wskazuje na główne użyte narzędzia i trudności w dowodach jakie udało się pokonać. Pod względem językowym autoreferat jest napisany bardzo dobrze.

Prace łączy to, że dotyczą rozwiązań uogólnionych dla zadań opisanych równaniami fizyki i biologii matematycznej, a użyte techniki opierają się na szacowaniu wielkości zależnych od rozwiązań rozważanych zagadnień oraz na przejściach granicznych (choć szacowane są różne wielkości: w [1] i [2] komutatory, w [3] zmiana entropii, a w [4] różne normy rozwiązań). Choć artykuły nie są poświęcone jednemu podstawowemu zagadnieniu, to rezultaty mieszczą się w jednym kręgu tematycznym i można je uznać za powiązane ze sobą. To wystarczy, by uznać wskazany zbiór prac jako spójny tematycznie zgodnie z ust. 2 art. 13 Ustawy. Bliższe spojrzenie na prace zawarte w rozprawie pokazuje, że użyte zostało szerokie spektrum technik: oszacowania w przestrzeniach Sobolewa, Besova, miar, czy BV, różnego rodzaju ciekawe i niestandardowe twierdzenia o zwartości i różne sposoby powiązania ciągu zagadnień aproksymujących z zagadnieniem aproksymowanym: w pracach [1] i [2] wygładzenia poprzez splot i oszacowania komutatorów, w pracy [3] metoda względnej entropii, wreszcie w pracy [4] podejście oparte o metodę punktu stałego i oszacowania a priori dające wystarczającą zwartość by móc przeprowadzić przejście graniczne. Również cel dla jakiego przeprowadzane są przejścia graniczne jest różny w różnych pracach: w pracach [1] i [2] pokazane jest, że rozwiązania dystrybucyjne spełniają równanie energii, w pracy [3] metoda względnej entropii jest użyta do badania asymptotyki czasowej, a w pracy [4] dowiedzione jest istnienie i jednoznaczność rozwiązania, oraz przeprowadzone jest przejście graniczne z jednym z parametrów modelu do nieskończoności. Doceniam szerokość i różnorodność użytych technik, wykraczających poza standardowy zestaw narzędzi analizy używany w równaniach cząstkowych, oraz umiejętność ich rozwijania oraz łączenia ze sobą by doprowadzić do nowego, interesującego wyniku.

Artykuł [1] dotyczy układu Eulera–Kortewega modelującego efekty kapilarne dla przepływów nielepkich i nieściśliwych. Głównym wynikiem pracy jest twierdzenie, że jeśli funkcje występujące w prawach konstytutywnych są odpowiednio regularne, a prędkość i gęstość (oraz jej gradient i laplasjan) należą do czasowo-przestrzennych przestrzeni Besova z odpowiednimi wykładnikami (które muszą być większe od $1/3$) oraz do L^∞, to lokalne równanie energii jest spełnione. Wynik ten jest związany z bardzo ważną w mechanice płynów hipotezą Onsagera, której treścią jest właśnie równoważność pomiędzy zachodzeniem równania energii a Hölderowską ciągłością pola prędkości z wykładnikiem co najmniej $1/3$. Trudność polegała na doborze odpowiednich seminorm Besova i na wyprowadzeniu oszacowań komutatorów na wyrażenia pochodzące od członów nieliniowych.

Hipotezy Onsagera dotyczą również główne wyniki pracy [2]. Rozważane są dwa modele: ściśliwy układ równań Eulera oraz Naviera–Stokesa na torusie i dziedzinie z brzegiem. Feireisl i współautorzy wykazali, że lokalne równanie energii wynika z odpowiedniej regularności rozwiązań w przestrzeniach Besova. Wynik ten wymagał jednak założenia, że gęstość jest silnie odizolowana od zera. Celem pracy [2] było usunięcie tego założenia, czyli wykazanie, że implikacja "regularność"$\Rightarrow$"równanie energii" z hipotezy Onsagera zachodzi także dla przypadku gdy dopuszczamy zerową gęstość czyli próżnię. W pracy zaproponowane są dodatkowe kryteria, które implikują żądany wynik w sytuacji dopuszczającej zerowanie gęstości: wymagane jest albo, że dywergencja przestrzenna prędkości jest miarą czasowo-przestrzenną, albo że ciśnienie ma dodatkową regularność a wielkość $\frac{\rho^\epsilon-\rho}{\rho^\epsilon}$ (gdzie ρ^ϵ jest wygładzoną gęstością) jest ograniczona w normie L^q przez stałą niezależną od ϵ. Praca zawiera ciekawą dyskusję tych dodatkowych założeń: pokazane jest, że w równaniach Naviera–Stokesa założenie, że dywergencja prędkości jest miarą jest naturalne, oraz podane są same w sobie interesujące kryteria implikujące ograniczoność wielkości $\left\|\frac{\rho^\epsilon-\rho}{\rho^\epsilon}\right\|_{L^q}$.

Podsumowując prace [1] i [2] warto podkreślić że dotyczą ważnej w mechanice płynów tematyki, wpisują się w nurt aktualnych badań prowadzonych przez najlepszych specjalistów w tej dziedzinie i w mojej ocenie wnoszą do niego istotny wkład.

Artykuł [3] poświęcony jest modelowi wzrostu i fragmentacji danemu równaniem

$$\partial_t n(x,t) + \partial_x(g(x)n(t,x)) + B(x)n(t,x) = \int_x^\infty k(x,y)B(y)n(t,y)\,dy \quad \text{dla } t>0, x\geq 0,$$

z warunkiem brzegowym $g(0)n(t,0) = 0$ i warunkiem początkowym $n(0,x) = n^0(x)$. Jeśli warunek początkowy jest jedynie nieujemną miarą Radona to i rozwiązanie musi być zdefiniowane jako miara. Głównym wynikiem pracy jest twierdzenie o zbieganiu rozwiązań o wartościach w przestrzeni miar do pewnej miary równowagowej gdy czas zmierza do nieskończoności. Użyta technika to metoda uogólnionej względnej entropii pochodząca od Perthame'a i jego współpracowników. Artykuł jest inspirowany pracą Gwiazdy i Wiedemanna, w której tą techniką badana jest asymptotyka czasowa rozwiązań miarowych dla zbliżonego zagadnienia McKendricka–von Foerstera. Ze względu na niewystępujące w tamtym modelu wyrażenia opisujące efekty wzrostu i fragmentacji, praca [3] wymagała jednak istotnie innego podejścia, wykorzystującego miary Younga i pochodzący od Carillo i współautorów wynik o zwartości w odpowiednio dobranej metryce w przestrzeni miar.

W pracy [4] badane jest zagadnienie modelujące wzrost nowotworu opisane układem równań

$$\frac{\partial n_k^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(n_k^{(1)}\frac{\partial W_k}{\partial x}\right) = n_k^{(1)} G^{(1)}(p_k),$$

$$\frac{\partial n_k^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(n_k^{(2)}\frac{\partial W_k}{\partial x}\right) = n_k^{(2)} G^{(2)}(p_k),$$

$$-\nu\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} + W_k = p_k,$$

$$p_k = \frac{k}{k-1}(n_k^{(1)} + n_k^{(2)})^{k-1},$$

dla $x \in \mathbb{R}$ i $t > 0$ z warunkami początkowymi $n_k^{(1)}(x,0) = n_{0,k}^{(1)}(x)$ oraz $n_k^{(2)}(x,0) = n_{0,k}^{(2)}(x)$. Niewiadoma $n^{(1)}$ to gęstość zdrowych komórek, a $n^{(2)}$ jest gęstością komórek patologicznych. Ciśnienie komórkowe p_k ogranicza wzrost komórek poprzez malejące funkcje $G^{(i)}$. Ponadto komórki przemieszczają się, a ich potencjał prędkości W_k jest powiązany z ciśnieniem p_k równaniem eliptycznym zwanym prawem Brinkmana. Stała $k \in \mathbb{N}$ jest nazywana sztywnością ciśnienia. Wyniki uzyskane w pracy uogólniają wcześniej wykazane przez Perthame'a i Vaucheleta analogiczne twierdzenia dla modelu z jedną populacją komórek, ale stosowane podejście jest istotnie inne, bowiem nie stosuje metody skompensowanej zwartości. Główne wyniki to twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań uzyskane poprzez zastosowanie twierdzenia Banacha o punkcie stałym oraz przejście graniczne do nieskończoności ze stałą k, czyli do tak zwanej nieściśliwej granicy, w której uzyskujemy zagadnienie ze swobodnym brzegiem gdzie związek między gęstościami komórkowymi a ciśnieniem jest zastąpiony przez tzw. zasadę komplementarności. Do przejścia granicznego wykorzystana jest metoda zwartościowa, a główna trudność polega na dowodzie silnej zbieżności ciągu ciśnień p_k, które mogą mieć skokowe nieciągłości względem zmiennej przestrzennej. Ciekawe są zawarte w artykule symulacje numeryczne potwierdzające uzyskany wynik teoretyczny że populacje komórek rozseparowane dla $t = 0$ pozostaną rozseparowane dla $t > 0$.

Oceniam wysoko poziom merytoryczny wyników zawartych w rozprawie. Użyte metody wykraczają poza standardowy zestaw narzędzi, a prace bardzo dobrze wpisują się w główny nurt aktualnych badań nad rozwiązaniami uogólnionymi dla równań cząstkowych typu ewolucyjnego. Autor pokazał, że umie biegle wykorzystać i twórczo rozwijać cały wachlarz złożonych metod analizy nieliniowej: różnorodność technik użytych w pracach mgra Dębca jest imponująca. Mgr Dębiec współpracuje z wybitnymi specjalistami, co pozwoliło mu twórczo rozwinąć swoje umiejętności oraz specjalistyczną wiedzę w tematyce z głównego nurtu obecnych badań nad równaniami cząstkowymi fizyki i biologii matematycznej.

W mojej ocenie przedstawiona rozprawa doktorska mgra Dębca stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego. Uważam, że spełnione są wszystkie wymogi stawiane przez Ustawę rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie mgra Dębca do dalszych etapów postępowania doktorskiego. Uważam również, że przedstawiona rozprawa jest wyróżniająca i tym samym wnoszę do Rady Dyscypliny Matematyka Uniwersytetu Warszawskiego o jej wyróżnienie.

Piotr Kalita

Piotr Kalita