Prof. dr hab. Piotr Biler
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wroclawski
pl. Grunwaldzki 2/4, 50–384 Wroclaw
tel. 71 375 7408
e-mail: Piotr.Biler@math.uni.wroc.pl

Wrocław, 14.07.2020.

Opinia o rozprawie doktorskiej mgr. Tomasza Dębca

Mgr Tomasz Dębiec przedstawił rozprawę doktorską pt. *Weak convergence methods for equations of mathematical physics and biology* napisaną pod opieką profesor Agnieszki Świerczewskiej-Gwiazdy na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego.

Doktorant jest autorem pięciu publikacji i kilku preprintów dostępnych w *arXiv* i *hal–archives ouvertes*, w większości współautorskich. Prace te ukazały się w bardzo dobrych czasopismach takich jak np. *Analysis & PDE*, *SIAM J. Mathematical Analysis* czy *Calculus of Variations & PDE*. Współautorami prac są nie tylko jego warszawscy mentorzy Agnieszka Świerczewska-Gwiazda i Piotr Gwiazda i młodzi dynamiczni matematycy z zagranicy (Emil Wiedemann, Marie Doumic) ale również wybitni uczeni zagraniczni jak Benoît Perthame, Athanasios Tzavaras i Nicolas Vauchelet.

Rozprawa doktorska składa się z czterech publikacji dotyczących kilku ważnych modeli z mechaniki ośrodków ciągłych i biologii matematycznej, a konkretnie układu Eulera–Kortewega, ściśliwych równań Eulera oraz Naviera–Stokesa, liniowego układu wzrostu–fragmentacji i modelu wzrostu nowotworu z dwoma typami komórek. Motywami przewodnimi tych badań są związki między regularnością słabych rozwiązań równań mechaniki płynów i zachowywaniem energii przez te rozwiązania, opisanie asymptotyki rozwiązań z użyciem entropii relatywnych, a także wykorzystanie analogii między płynami nieściśliwymi i ściśliwymi oraz oddziaływaniem dwóch rodzajów tkanek.

Pierwszy temat jest ściśle związany ze słynną hipotezą Onsagera z 1949 roku dotyczącą progu regularności słabych rozwiązań układu Eulera cieczy nieściśliwej niezbędnej do otrzymania fizycznie akceptowalnych rozwiązań, dla których w układzie izolowanym energia nie rośnie. Innymi słowy, jest to podanie pewnej reguły, która wybiera "rozsądne" rozwiązania spośród mnogości możliwych rozwiązań słabych na podstawie apriorycznej ich gładkości (w sensie spełniania pewnego warunku typu Höldera). Warto tu dodać, że pionierska praca Witolda Wolibnera z 1933 roku w *Mathematische Zeitschrift* o rozwiązaniach układu Eulera ustalała ich regularność właśnie na tym krytycznym poziomie. O trudności tego zagadnienia (blisko związanego też z *Problemem Milenijnym* dotyczącym regularności rozwiązań układu Naviera–Stokesa) świadczy fakt, że satysfakcjonujące rozwiązanie hipotezy Onsagera ukazało się 70 lat po jej sformułowaniu i to w (niemal stustronnicowej) pracy w *Annals of Mathematics* (Philip Isett, 2018). Równolegle trwały (i trwają) badania nad analogonami tej hipotezy dla innych układów równań w mechanice ośrodków ciągłych — od ogólnych układów praw zachowania do wielu konkretnych modeli, jak np. rozważany w pierwszej części rozprawy układ Eulera–Kortewega opisujący mieszaniny gazów i cieczy. Badania te prowadzą wybitni matematycy (C. Bardos, P. Constantin, C. De Lellis, G. L. Eyink, E. Feireisl, L. Székelyhidi Jr., E. S. Titi) a istotny wkład uzyskali też Piotr Gwiazda i Agnieszka Świerczewska-Gwiazda. Wejście w tę trudną tematykę doktoranta, uwieńczone publikacją (wspólną z P. G., A. Ś.-G. i A. Tzavarasem) w prestiżowym czasopiśmie *Calculus of Variations*, jest więc poważnym osiągnięciem. Główny wynik tej pracy tzn. warunkowe twierdzenie mówiące, że dostatecznie regularne w sensie norm Biesowa rozwiązania spełniają lokalnie zasadę zachowania energii, zostało udowodnione wyrafinowaną techniką (używającą m.in. subtelnych oszacowań komutatorowych) nawiązującą do pomysłów P. Constantina i E. Feireisla. Subtelną kwestią okazało się tu fizycznie uzasadnione założenie o małej regularności funkcji ciśnienia.

Druga praca na podobny temat, wspólna z młodymi matematykami (I. Akramovem, Jackiem Skipperem, Emilem Wiedemannem) ukazała się w świetnym *Analysis & PDE* i poświęcona jest badaniom układów Eulera i Naviera–Stokesa dla cieczy ściśliwych, a rozwiązania mogą dopuszczać próżnię, tzn. gęstość cieczy może zerować się w pewnych obszarach. I tu znowu, progowa regularność słabych rozwiązań jest określona w przestrzeniach typu Biesowa, a bardziej poręczne, prostsze kryterium wyrażone jest w terminach warunku Höldera dla zmiennej ciśnienia. Obszar przestrzenny może być tu torusem d-wymiarowym a przeniesienie wyników na przypadek gładkich obszarów z brzegiem jest także niebanalne.

Trzecia praca wchodząca w skład rozprawy została napisana z Marie Doumic, Piotrem Gwiazdą i Emilem Wiedemannem, a poświęcona jest badaniom liniowego, różniczkowo-całkowego modelu wzrostu i fragmentacji, pojawiającego się zarówno w biologii populacyjnej i epidemiologii, jak i np. w fizyce polimerów. Istotne jest przy tym rozważanie bardzo ogólnych miarowo-wartościowych rozwiązań (ogólniejszych niż badane we wcześniejszej pracy z 2005 roku Philippe'a Michela, Stéphane'a Mischlera i Benoît Perthame'a), dla których metody entropii relatywnych są delikatnym narzędziem badania asymptotyki dla dużych czasów. Techniczne wyzwania w tej pracy stanowiły kwestie słabych zwartości rodzin rozwiązań.

Ostatnia praca w rozprawie doktorskiej, wspólna z Markusem Schmidtchenem, dotyczy modelu wzrostu nowotworu i ukazała się w *Acta Applicandae Mathematicae*. Nawiązuje ona do wcześniejszych badań B. Perthame'a i N. Vaucheleta i została całkiem niedawno uogólniona na przypadek dowolnego wymiaru w preprincie wspólnie przez tychże autorów (T. D., B. P., M. S., N. V.). Badane są tu fundamentalne zagadnienia istnienia i jednoznaczności rozwiązań dla układów równań parabolicznych i eliptycznych typu uśrednionego pola, przypominających równania hydrodynamiki ale i chemotaksji. Równanie eliptyczne w tym układzie jest matematycznym wyrażeniem tzw. prawa Brinkmana. Jest też wyznaczona asymptotyka w tzw. granicy nieściśliwej.

Rozprawa jest **techniczna** w dobrym sensie tego przymiotnika, tzn. używa mocno skomplikowanych metod, ale we właściwie motywowany sposób, uzasadniony wagą i trudnością zagadnień. Czyta się ją niełatwo, ale widać troskę autorów o maksymalną przystępność prezentacji.

Rozprawa napisana jest z dużą pieczołowitością, zauważyłem naprawdę bardzo rzadkie literówki lub niezręczności językowe (np. na str. 791^{14} pracy z *Analysis & PDE* czyli w części 4 rozprawy: *insensitive* powinno zastąpić użyte określenie *agnostic*).

Szczególnie podobało mnie się w rozprawie konsekwentne i fizycznie dobrze umotywowane podejście do zagadnienia wyboru "dobrych" słabych rozwiązań, tzn. tych które prowadzą do spełniania stosownie sformułowanych zasad zachowania energii.

Rozprawa świadczy o bardzo dużej wiedzy doktoranta w zakresie różnorodnych i często bardzo specyficznych technik dla równań różniczkowych typu eliptycznego i parabolicznego.

Doktorant świetnie orientuje się w literaturze dotyczącej badanych i zbliżonych do nich zagadnień, potrafi atakować trudne zagadnienia i współpracować i z młodymi, i z doświadczonymi badaczami.

Przechodząc do konkluzji: uważam, że ta bardzo solidna rozprawa spełnia wymagania ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Po rozważeniu różnych aspektów rozprawy (jej głębokości, umiejscowienia w światowym nurcie najnowszych badań, użytych bardzo wyrafinowanych metod i interesujących wyników) uważam, że jest to wyróżniająca się rozprawa doktorska, choć w pewnym sensie nietypowa bo oparta na samych pracach współautorskich. Po analizie innych publikacji doktoranta, w tym samodzielnej, oraz świetnie napisanego autoreferatu, będę popierać wniosek o jej wyróżnienie.

Piotr Biler