prof. dr hab. Sławomir Cynk
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków
e-mail: slawomir.cynk@uj.edu.pl

Kraków, 5 marca 2024

Report on the revised version of **Robert Śmiech** PhD Thesis
Algebraic contact manifolds, their generalizations and applications

1. Discussion of the content of the thesis

The revised thesis consists of six chapters, the first chapter contains Introduction, I will briefly discuss the contents of chapters 2-6.

Chapter 2: Mori theory of projective contact manifolds.

The main goal of this chapter is to present preliminaries on singularities and Mori contractions of projective contact manifolds necessary to formulate and outline the proof of Theorem 2.3.2, which put together results of Druel, Kebekus-Peternell- Sommese-Wiśniewski and Demailly. This theorem gives a proof of Conjecture 2 (LeBrun-Salamon) for Fano manifolds with $b_2 > 1$ and list of toric contact Fano manifolds (two in each dimension).

Chapter 3: Linear systems of Fano varieties.

The author studies the lower bound of the dimension of the fundamental system on Fano varieties, results of these chapter are related to the Kawamata-Ambro effective nonvanishing Conjecture (Conjecture 3). The proof of the lower bound consists of an application of Hirzebruch-Riemann-Roch, Serre duality and an additional Observation 3.3.1 (in the case of an even coindex) to deduce most coefficients of the Hilbert polynomial. Then the assertion follows from Bogomolov's inequality (Langer) and weaker inequalities under weaker assumption by Liu.

One of the results of this chapter (Thm. 3.3.7), which was proved in a joint paper of the Author and Höring, asserts that the dimension of a fundamental system on a Gorenstein-Fano variety of dimension at most 5 (with canonical singularities) is at least 2.

This chapter is concluded with Corollary 3.5.1 which gives a lower bound for the dimension of fundamental system on a smooth Fano manifold of odd dimension $2n+1$ with index $n+1$, $n = 2, 3, 4$ and the second Betti number equal 1. The assumptions of this Corollary are satisfied by contact Fano manifolds except $\mathbb{P}^{2n+1}$ and $\mathbb{P}(T\mathbb{P}^{n+1})$.

In last section of Chapter 3. the Author proposed the Conjecture 4., it contains a lower bound exactly of the form that is sufficient for Thm. 4.1.3.

Chapter 4: Linear systems and projective contact manifolds.

In this chapter the Author presents the contents of the paper by Ochetta, Romano, Solá Conde and Wiśniewski (ORCW21), in particular sketches of proofs of [ORCW21, Thm. 5,1 & Thm. 6.1]

Chapter 5: Symplectic and contact varieties in the singular settings.

This chapter is devoted to the study of two generalizations of the notion of contact manifolds: **contact variety** (Def. 5.3.1) amd **generically contact manifold** (Def. 5.3.15. The former is a variety with rational singularities and a global line bundle that defines a contact structure on the smooth locus. the latter is a smooth manifold with a global line bundle which defines a contact structure on an open dense subset. Main results on singular contact varieties are Cor. 5.3.9 (any component of the singular locus of a contact variety has even codimension) and Cor. 5.3.14 (resolution of the contact variety is a contact manifold iff the resolution is crepant) and Thm. 5.3.4 (condition for existence of an induced contact structure on an quotient). Proofs of these Corollaries are based on a singular version of symplectification and singular version of Kaledin's stratification. This chapter is concluded with two examples of singular contact varieties and description of singular contact varieties in dimension 3 (Th,. 5.4.3 and Thm. 5.4.4). Finally example 5.4.11 yields a contraction of $\mathbb{P}(TS)$ for a ruled surface S over an elliptic curve which has contact singularities in the sense of Campana-Flenner but fails to be a singular contact surface.

Chapter 6: The geometry of Monge-Ampère equations.

Symplectic and contact manifolds provide a proper framework to develope a formalism of Monge-Ampère equqtions, partial differential equations of order 2 linear with respect to hessian and second order drivatives. In this manner the study of partial differential equations becomes equivalent with the study of hyperplane sections of Lagrangian Grassmannian. Lagrangian Grassmannian of a symplectic space parametrise Lagrangian subspaces, in particular it is a subvariety of standard Grassmannian $\mathbb{G}(n, 2n)$. Lagrangian Grassmannian is however a variety with much more complicated geometry than standard Grassmannian.

Grassmannian admits a Plčker embeding into a projective space (Plücker coordinates) which follows from the correspondence between vector subspaces of a finitely dimensional vector space and simple vectors modulo proportionality. In a similar manner we can embed Lagrangian Grassmannian, taking into account that degree 2 minors of a symmetric matrix may be linearly dependent. In this thesis considered is the case $n = 3$, then the Plücker embedding maps into projective space of dimension 19, while the Lagrangian Grassmannian into a space of dimension 13. The action of the symplectic group has four orbits. The largesr orbit is a hypersurface, the smallest one is the image of Grassmannian

These orbits correspond to four types of Monge-Ampère equations. Chapter 6. of this thesis contains results of the paper [GMMŚ21].

The subject of this part is distinct from the subject of the rest of the thesis, also connections with the subject of contact manifolds is very loose. The main results of this part are Prop. 6.3.9 and Thm. 6.3.12, their proofs uses cohomology computations and representations of symplectic group, definitely they are non-trivial.

2. Comparison with the first version

The changes in the mathematical contents between original and revised dissertation are reduced almost solely to Chapter 4 and Chapter 5. Chapter 4 was shortened, and necessary results from the paper Buczyński-Wiśniewski ([BW22]) were combined into Lemma 3.4, the author also formulates Thm. 4.1.3, however in my opinion this theorem does not carry any original mathematical content (also this theorem depends on the Conjecture 4).

The author removed some quotations from other sources, especially M.Sc. Thesis by Barbara Mroczek. An important extension in this chapter is the Remark 5.3.31 which presents contact varieties in Examples 5.3.27 and 5.3.28 as a nilpotent orbit closure.

The section 5.4 *Projective singular contact threefold* is a vast extension of the subsection 5.4.6 from the first version with the main result (Thm. 5.4.19) which states that every projective threefold contact variety is a crepant contraction of $\mathbb{P}(TS)$ for some ruled surface S. In the revised version the Author proves also the convers that for any ruled surfaces S the contact manifold $\mathbb{P}(TS)$ admits a contraction of the image of S in $\mathbb{P}(TS)$ to the base curve of S. Completely new Thm. 5.4.4 asserts that there exists a unique singular projective contact threefold (and describes it in details).

The revision incorporate to some extent the suggestions I have included in the report on the first version.

3. Conclusion:

The leading topic of this dissertation are contact manifolds, an area of active study in algebraic geometry. The thesis contains contributions in three areas

- linear system defined by a fundamental divisor on Fano varieties, lower bound of its dimension
- singular contact varieties,
- geometry of Monge-Ampère equations.

respectively in sections 3, 5 and 6.

I believe that revised version of thesis meets the requirement and can be accepted for PhD defense.

Sławomir Cynk

Sławomir Cynk

Elektronicznie podpisany
przez Sławomir Cynk
Data: 2024.03.05 01:34:40
+01'00'

prof. dr hab. Sławomir Cynk
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków
e-mail: `slawomir.cynk@uj.edu.pl`

Kraków, 14 lipca 2023

Recenzja w postępowaniu doktorskim mgra **Roberta Śmiecha**
pt. Algebraic contact manifolds, their generalizations and applications

Praca doktorska zawiera wyniki z trzech grup tematycznych:

- system liniowy zadany przez dywizor fundamentalny na rozmaitości Fano, ograniczenia dolne wymiaru,
- osobliwe rozmaitości kontaktowe,
- geometria równań Monge'a-Ampère'a.

Elementem łączącym te trzy zagadnienia są rozmaitości kontaktowe, czyli zespolone rozmaitości posiadające tzw. strukturę kontaktową. Bezpośrednio z definicji wynika, że rozmaitości kontaktowe mają wymier nieparzysty. Jedynymi przykładami rzutowych rozmaitości kontaktowych są zgodnie z fundamentalnym wynikiem Kebekusa, Peternella, Sommese i Wiśniewskiego projektywizacje przestrzeni kostycznej $\mathbb{P}(T^*X)$ rozmaitości rzutowej X oraz rozmaitości Fano z liczbą Bettiego $b_2(X) = 1$. Wzorcowym przykładem rozmaitości kontaktowej jest przestrzeń rzutowa $\mathbb{P}^{2n+1}$. Jednym z najważniejszych pytań dotyczących kontaktowych rozmaitości Fano jest hipoteza LeBruna-Salomona, zgodnie z którą wszystkie takie rozmaitości powstają w wyniku pewnej konstrukcji zadającej strukturę symplektyczną na minimalnej orbicie nilpotentnej działania pewnej grupy i w konsekwencji strukturę kontaktową na jej projektywizacji.

1. Omówienie wyników rozprawy

Wyniki własne autora zawarte są w rozdziałach 3, 5 (sekcji 5.4) oraz 6.

1.1. System liniowy zadany przez dywizor fundamentalny. Rozdział 3. pracy poświęcony jest problemowi oszacowania dolnego wymiaru systemu fundamentalnego, Śmiech udowodnił następujące wyniki

- Wymiar systemu fundamentalnego na rozmaitości Fano wymiaru co najwyżej 5 z osobliwościami Gorensteina kanonicznymi jest co najmniej 2,
- Wymiar systemu antykanonicznego na rozmaitości Fano wymiaru co najwyżej 5 z osobliwościami Gorensteina kanonicznymi jest co najmniej 4,
- Wymiar systemu fundamentalnego na gładkiej rozmaitości Fano wymiaru n indeksu $i = n - 4$ z liczbą Bettiego $b_2 = 1$ jest równy co najmniej $n - 1$,
- Wymiar systemu antykanonicznego na rozmaitości Fano wymiaru co najwyżej 5 z osobliwościami Gorensteina log-kanonicznymi jest dodatni.

Ponadto udowodnił, że generyczny element systemu antykanonicznego rozmaitości Fano wymiaru 5 z osobliwościami Gorensteina kanonicznymi jeżeli jest zredukowany, to ma osobliwości kanoniczne.

Dowody oszacowań opierają się na analizie wielomianu Hilberta na terminalizacji badanej rozmaitości, sekcja 3.3. Metoda ta nie jest jednak autorstwa Śmiecha, w pracy nie znalazłem informacji na temat pochodzenia tej metody. Porównanie jednak dolnej połowy strony 4 z [Flo13] z dolną połową str. 26 nie pozostawia żadnej wątpliwości. W tej sytuacji umieszczenie w tekście zwrotu

This case which was studied in [Flo13] and [Liu19]

,
moim zdaniem jest dalece niewystarczające. Wydaje się, że oryginalny wkład autora w tej części polega na Obserwacji 3.3.1. Ja takiej obserwacji nie znalazłem w innych pracach, natomiast wszystkie pozostałe "elementy rozumowań" zostały zaczerpnięte od innych autorów. Podobnie dowód twierdzenia 3.4.1.

1.2. **Osobliwe rozmaitości kontaktowe.** Autor definiuje osobliwe rozmaitości kontaktowe, jako rozmaitości z umiarkowanymi osobliwościami, wiązką liniową zadaną globalnie i taką, że na części regularnej wiżka ta jest ilorazem wiązki stycznej przez dystrybucję definiującą strukturę kontaktową. Następnie dowodzi, że

- rozmaitości kontaktowe osobliwe mają osobliwości Gorensteina, kanoniczne.
- związek z rozmaitościami symplektycznymi w pełni przenosi się na osobliwe rozmaitości kontaktowe. Pozwala to na przeniesienie stratyfikacji z przypadku gładkiego na osobliwy,
- iloraz rozmaitości kontaktowej przez skończoną grupę automorfizmóœ zachowujących strukturę kontaktową, jest rozmaitością kontaktową,
- częściowe, krepantne rozwiązanie (np. terminalizacja) rozmaitości kontaktowej osobliwej jest rozmaitością kontaktową osobliwą, krepantne rozwiązanie, jest rozmaitością kontaktową klasyczną (jeżeli rozwiązanie nie jest krepantne ale dywizor wyjątkowy jest sumą rozłącznych dywizorów gładkich, to dostajemy tzw. rozmaitość generycznie kontaktową, tzn. dystrybucja jest zadana globalnie, ale warunek niezdegenerowania nie wszędzie zachodzi).

Dowody powyższych faktów, są - poza twierdzeniem o ilorazie - bezpośrednim przeniesieniem dowodów odpowiednich faktów dla przypadku gładkiego. Wynika to z wyboru bardzo restrykcyjnej definicji rozmaitości kontaktowej osobliwej. W przypadku twierdzenia o ilorazie, dowód wynika wprost z lematu o opuszczaniu wiązek wektorowych, ze względu na bardzo restrykcyjne założenie 2.

Rozdział zakończony jest szczegółowo omówionym przykładem porównującym dwie różne rozmaitości kontaktowe toryczne wymiary $2n+1$.

1.3. **Geometria równań Monge'a-Ampère'a.** Rozmaitości symplektyczne i kontaktowe definiują język właściwy dla budowania formalizmu równań Monge'a-Ampère'a, równań różniczkowych cząstkowych rzędu 2 liniowych względem hesjanu i drugich pochodnych cząstkowych niewiadomej. W ten sposób badanie równań różniczkowych cząstkowych staje się równoważne z badaniem hiperpłaskich przekrojów Grassmannianu Lagrange'a. Grassmannian Lagrange'a przestrzeni symplektycznej jest rozmaitością parametryzującą podprzestrzenie

Lagrange'a, w szczególności jest podrozmaitością zwykłego Grassmannianu $\mathbb{G}(n, 2n)$. Grassmannian Lagrange'a jest jednak rozmaitością o dużo bardziej skomplikowanej geometrii niż zwykły Grassmannian.

Grassmannian posiada zanurzenie Plückera w przestrzeń rzutową (współrzędne Plückera) wynikające z faktu, że podprzestrzenie wektorowe przestrzeni wektorowej skończenie wymiarowej odpowiadają wektorom prostym modulo proporcjonalność. W podobny sposób możemy zanurzać Grassmanniany Lagrange'a, pamiętając jednak o tym, że minory stopnia 2 macierzy symetrycznej mogą być liniowo zależne. W pracy rozważany jest przypadek $n = 3$, wtedy zanurzenie Plückera odwzorowuje w przestrzeń rzutową wymiary 19, natomiast Grassmaniann Lagrange'owski w przestrzeń rzutową wymiary 13. Działanie grupy symplektycznej ma cztery orbity. Największa orbita jest hiperpowierzchnią, a najmniejsza obrazem Grassmanianu. Orbity te odpowiadają czterem typom równania Monge'a-Ampère'a. Rozdział 6. rozprawy zawiera wyniki z pracy [GMMŚ21] dostęnej jako [arXiv:2105.06675], wspólnej z J. Gutt, G. Manno, G. Moreno.

Tematyka tej części jest zdecydowanie odmienna od tematyki reszty rozprawy, również związek z szeroko rozumianą tematyką rozmaitości kontaktowych jest dość luźny. Dwa główne wyniki to Prop. 6.3.9 oraz Thm. 6.3.12, ich dowody wykorzystują rachunek kohomologiczny oraz reprezentacje grupy symplektycznej i zdecydowanie nie są trywialne.

1.4. **Pozostała zawartość pracy.** Rozdział 4. zawiera bardzo szczegółowe omówienie treści pracy [ORCW21]. Wydaje się dość szczególną praktyką przepisywanie dość obszernych fragmentów cudzej pracy w rozprawie doktorskiej, szczególnie jeżeli się z wyników tej pracy nie korzysta. Podobno motywacją jest pokazanie, że w dowodzie tym autorzy wykorzystują Cor. 3.3.6.

Sekcja 5.2 zawiera obszerne fragmenty pracy magisterskiej [Mro18], z wyników tej pracy również autor nie korzysta, jedynie w Prop. 5.4.14 dowodzi, że pewne rozwiązania osobliwości osobliwej rozmaitości kontaktowej jest rozmaitością generycznie kontaktową w sensie Def. 5.2.1.

Pozostałe części pracy zawierają wstępy i omówienia, niejednokrotnie podane w bardzo chaotycznej postaci. Szczególnie niezrozumiały jest dobór faktów, których dowody zostały przytoczone. *R*ozprawa w zdecydowanej większości składa się z tekstów nieoryginalnych, o ile twierdzenia propozycje, lematy są właściwie oznaczone, to w prypadku dowodów takich oznaczeń już nie ma. Na przykład porównując dowód Tw. 5.2.4 z dowodem [Mro18, Tw. 2.5] W rozprawie mamy

"The line bundle L associated with the generically contact structure must be isomorphic to $\mathcal{O}_X(d)$ for some $d \in \mathbb{Z}$."
natomiast w [Mro18]

"Ustalmy na $\mathbb{P}^{2n+1}$ nigdzie zerową skręconą formę $\theta : T\mathbb{P}^{2n+1} \longrightarrow L$. Jednowymiarowa wiązka liniowa L nad przestrzenią rzutową jest izomorficzna z $\mathcal{O}(d+1)$ dla pewnego d."

I w ten sam sposób przez cały dowód. Niestety nie tylko ten dowód tak wygląda, ale znaczące fragmenty rozprawy. Nie tylko wyniki i dowody zawierają, niejednokrotnie nieoznaczone zapożyczenia. Sekcja 5.3.3 zawiera przepisane fragmenty z pracy [Kal06], zmodyfikowane w sposób niekiedy komiczny: zmiana oznaczeń, zmiana kolejności liter, słów, linijek.

Zgodnie z art. 187 ust. 1 i 2 Ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce „Rozprawa doktorska prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w dyscyplinie albo dyscyplinach oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej"

Ze względu na zakres zapożyczeń, również w tekstach omawiających stosowane metody, nie sposób stwierdzić, że rozprawa spełnia powyższe wymaganie. Podobnie te fragmenty rozprawy, który mogę uznać za autorskie, nie stanowią rozwiązania oryginalnego problemu naukowego.

W przypadku oszacowań wymiaru systemu fundamentalnego, uzyskane wyniki są nowe, interesujące, ale wkład autora w rozwój metody jest na tyle znikomy, że nie wyniki te nie mogą stanowić podstawy do nadania stopnia doktora.

Zdecydowanie większy potencjał mają wyniki dotyczące osobliwych rozmaitości kontaktowych, niestety ta część pracy jest wyraźnie nieukończona. W mojej ocenie wartość tej części rozprawy znacząco wzrośnie, jeżeli autorowi uda się odpowiedzieć na pojawiające się naturalne pytania, np. o związek między osobliwymi rozmaitościami kontaktowymi, osobliwościami kontaktowymi (wprowadzonymi przez Campanę i Flennera)

Największym mankamentem rozprawy jest jednak ogromny zakres nieuprawnionych zapożyczeń, nieoznakowanych cytowań. W mojej ocenie najłagodniej można ocenić to jako naruszenie dobrych praktyk w działalności naukowej.

Konkluzja: warunkowa

Biorąc pod uwagę powyższe zastrzeżenia przedstawiam **warunkową** konkluzję rozprawy. Rozprawa będzie mogła zostać przyjęta **pod warunkiem** przygotowania przez autora poprawionej wersji rozprawy uwzględniającej następujące kwestie:

1. Usunięcie z tekstu rozprawy fragmentów, które zostały przepisane z prac innych matematyków, a które nie odgrywają istotnej roli w badaniach autora (w szczególności rozdział 4 z wyjątkiem przykładu 4.2.1, który może być przeniesiony do rozdziału 6, większość treści sekcji 5.1, 5.2, 5.3),
2. usunięcie dowodów klasycznych faktów z zakresu geometrii algebraicznej, które są przepisane (lub przetworzone) z dostępnych źródeł, szczególnie tych, które nie są wykorzystane dalej w rozprawie, lub wykorzystane są jedynie do dowodów faktów, które nie są w rozprawie wykorzystywane.
3. właściwe oznaczenie cytowań faktów (np. Lemat 5.3.7), dowodów (nawet jeżeli te dowody są literacko przetworzone, ale zawierające de facto te same rozumowania matematyczne), omówień i wprowadzeń.
4. właściwe oznaczenie dowodów, które co prawda odnoszą się do sytuacji ogólniejszej, ale rozumowania są bezpośrednim przeniesieniem dowodów z przypadków szczególnych (np. Thm. 5.4.1, zdanie wprowadzające mówi, że rozmaitości kontaktowe osobliwe zostały wprowadzone w taki sposób, aby konstrukcja 5.3.1 działała, moim zdaniem w pracy powinna znajdować się uwaga, że dowód również jest bezpośrednio przeniesiony z przypadku klasycznego).
5. właściwie oznaczenie autorstwa fragmentów dowodów własnych wyników, szczególnie dotyczy to rozdziału 3 i sekcji 3,3, zacytowanie wcześniejszych wyników innych dotyczących ograniczenia dolnego wymiaru systemu fundamentalnego oraz porównanie ich z wynikami innych autorów.

Przykłady w nawiasach nie są kompletną listą poprawek, a jedynie ilustracją jakiego typu zmiany są potrzebne.

S Cynk