dr hab. Sławomir Plaskacz
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, 29 stycznia 2019

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr Rajani Singh
pt.
„Calculation of optima and equilibria in dynamic resource extraction problems"
„Obliczanie optimów i równowag w dynamicznych problemach związanych z eksploatacją zasobów"

W pracy przedstawione są dwa modele eksploatacji zasobów: model liniowo-kwadratowy z ograniczonymi sterowaniami oraz model Levhari-Mirman z logarytmiczną funkcją wypłaty. Zasobem w rozważanych modelach jest jeden gatunek ryb, którego łączna biomasa zadaje stan układu $x \in [0, \infty)$. Połowem ryb zajmuje się skończenie wielu lub kontinuum graczy. Wielkość połowu wpływa z jednej strony na biomasę, czyli stan układu, a z drugiej strony rzutuje na wypłatę poszczególnych graczy. Problem rozważany jest w modelach z czasem dyskretnym i z czasem ciągłym. W każdym przypadku rozważany jest problem maksymalizacji sumy wypłat graczy, którego rozwiązanie nazywane jest w pracy optimum socjalnym oraz problem znalezienia równowagi Nasha. Strategie graczy są deterministyczne oraz zakłada się, że podejmując decyzję gracz dysponuje informacją o stanie układu x . Problem jest rozważany zarówno w skończonym, jak i nieskończonym horyzoncie czasowym. Podstawowym narzędziem do wyznaczania optimów i równowag jest zasada programowania dynamicznego, która w zagadnieniach z czasem dyskretnym nazywana jest równaniem Bellmana, a problemach z czasem ciągłym przyjmuje postać równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana opisującego funkcję wartości. Problemy rozważane w rozprawie zaliczam do tematyki, która jest matematycznie trudna i ponadto istotna z punktu widzenia zastosowań. Z drugiej strony otrzymane wyniki dotyczą dość wąskiej klasy modeli. Modele te są na tyle proste aby można było znajdować rozwiązania analityczne metodą nieoznaczonych współczynników opierającą na przewidywaniu postaci rozwiązania. Należy jednak podkreślić, że stosując te elementarne metody autor wykazał się pomysłowością oraz rzetelnością matematyczną. W rozdziałach 2-5 rozważane są modele z czasem dyskretnym. Model z czasem ciągłym jest rozważany w rozdziale 6. Funkcje wartości otrzymane w rozdziale 6 w wyniku zastosowania metody przewidywania spełniają równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana w sensie klasycznym.

W rozdziale 2 rozważany jest model liniowo-kwadratowy z nieskończonym horyzontem, w którym każdy z graczy ma taki sam zbiór akcji zależny w sposób liniowy od stanu układu. Gra jest całkowicie symetryczna. Jej dynamika jest zależna od stanu układu oraz średnich połowów. Zakłada się ponadto, że współczynnik regeneracji zasobów $1+\xi$ jest równy $\frac{1}{\beta}$, gdzie β jest współczynnikiem dyskontowym jednakowym dla każdego z graczy. Stosując warunek konieczny w wersji Karush'a-Kuhn'a-Tuckera dowodzi w Lemacie 9, że maksimum w równaniu Bellmana (2.2.1) jest osiągane na przekątnej, czyli jest symetryczne. Dzięki temu problem wyznaczenia funkcji wartości jest zagadnieniem jednowymiarowym. W dowodzie Twierdzenia 10 opisującego funkcję wartości w zagadnieniu optimum socjalnego przedstawiona jest pełna droga dojścia do analitycznego wzoru opisującego funkcję wartości. Zaprezentowana metoda jest po części algorytmem, a po części sztuką wyznaczania funkcji wartości. Metoda opiera się na założeniu, że funkcja wartości jest funkcją kwadratową. Ostatecznie okazuje się, że funkcja wartości jest kwadratowa na początkowym przedziale $[0,\tilde{x})$, a następnie stała. Jeżeli $x \leq \tilde{x}$, to optymalny poziom połowów dla każdego z graczy jest równy ξx. Oznacza to, że optymalna trajektoria jest stała. Gracze wyławiają w kolejnym okresie tyle ryb, o ile zwiększyła się biomasa w ich obszarze połowów. Jeżeli $x > \tilde{x}$, to optymalny socjalnie poziom połowów każdego z graczy jest równy $\xi\tilde{x}$. To oznaczałoby, że gdy $x_0 > \tilde{x}$, to $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$. Jest to raczej nierealne ze względu na ograniczoną pojemność mórz. W rozważanym modelu byłoby zasadne wprowadzenie górnego ograniczenia na x. Próba wyznaczenia funkcji wartości odpowiadającej równowadze Nasha metodą nieoznaczonych współczynników zakończyła się niepowodzeniem. W Theorem 18 udało sie jedynie stwierdzić, że funkcja wartości odpowiadajaca symetrycznej równowadze Nasha nie jest opisanej w tezie postaci. W grze liniowo-kwadratowej z continuum graczy zostały wyznaczone funkcje wartosci oraz strategie zarówno w problemie optimum socjalnego, jak i w problemie wyznaczenia równowagi Nasha. Model gry dynamicznej z kontinuum graczy rozważany w rozprawie jest analogiczny do modeli rozważanych wcześniej w pracach A. Wiszniewskiej-Matyszkiel i opiera się na Decomposition Theorem z pracy [79]. Analiza trajektorii odpowiadających równowadze Nasha prowadzi do pesymistycznego wniosku, że zasoby wyczerpują się w skończonej liczbie kroków, o ile wartość początkowa zasobów jest niższa od $\hat{x}_\infty$ danego w Theorem 14 (c). Wyczerpywanie się zasobów jest spowodowane ich rabunkową eksploatacją. Zaproponowany w rozdziale 2.4 system podatkowy służy zwiększeniu wypłat w zagadnieniu optimum socjalnego. Nie jest przeprowadzona analiza wpływu systemu podatkowego na równowagi Nasha.

W rozdziale 3 model liniowo-kwadratowy jest rozważany w uproszczonym wariancie zagadnienia ze skończonym horyzontem. Dla dalszego uproszczenia zakłada się liczba powtórzeń jest równa 2, wypłata końcowa jest równa 0 oraz liczba graczy $n = 2$. W zagadnieniu ze skończonym horyzontem zarówno strategie jak i funkcje wartości są zależne od czasu $t = 2, 1$. Zarówno konstruowane strategie równowagi, jak i funkcje wartości sa nieciągle dla $t = 1$. Ponadto istnieje kontinuum nieciągłych równowag Nasha. Nieregularność otrzymanych strategii oraz funkcji wartości w uproszczonym maksymalnie zagadnieniu z poprzedniego rozdziału ma być w intencji autora usprawiedliwieniem niepowodzeń przy wyznaczaniu równowagi Nasha. Trudno się z tą argumentacją nie zgodzić. Tym bardziej, że problem opisu funkcji wartości odpowiadających równowadze Nasha za pomocą układu równań Hamiltona-Jacobiego jest problemem otwartym.

W rozdziale 4 rozważany jest problem liniowo-kwadratowy analogiczny do problemu z rozdziału 2 bez założenia *Golden rule*. Golden rule to założenie o równości tempa wzrostu w gospodarce oraz tempa wzrostu zasobów - łącznej masy wybranego gatunku ryb. Stopa wzrostu w gospodarce występuje przy obliczaniu wypłat gracza jako sumy zdyskontowanych wypłat z kolejnych etapów gry. Tempo wzrostu zasobów $1+\xi$ opisuje dynamikę gry. Jeżeli czynnik dyskontowy β jest mniejszy od $\frac{1}{1+\xi}$ to funkcja wartości V^N w problemie ze skończonym horyzontem N dla czasu 0 jest opisana w Theorem 29. Funkcja wartości w problemie z nieskończonym horyzontem jest równa $V^N(0,\cdot)$ na przedziale $[\hat{x}_N, \hat{x}_{N+1}]$. Zatem funkcja wartości w problemie z nieskończonym horyzontem przedziałami jest równa funkcji wartości w problemie ze skończonym horyzontem. Równość zachodzi dla x z przedziału $(0, \tilde{x})$. Jest to interesująca obserwacja.

W wielu zagadnieniach sterowania optymalnego nie jest możliwe podanie funkcji wartości za pomocą wzorów analitycznych. Pozostaje wyznaczenie przybliżonej funkcji wartości za pomocą metod numerycznych. Jednakże funkcja wartości jest jedynie narzędziem służącym do wyznaczenia optymalnych strategii. Pojawia się pytanie na ile dokładnym przybliżeniem sterowań optymalnych są przybliżone sterowania optymalne otrzymane za pomocą przybliżonych funkcji wartości. Ten sam problem dotyczy trajektorii optymalnych oraz oraz trajektorii odpowiadających przybliżonym sterowaniom optymalnym. W rozdziale 5, wyznaczone są analitycznie funkcje wartości oraz sterowania w modelu Levhari-Mirmana z czasem dyskretnym i skończonym horyzontem w problemie optimum socjalnego oraz dla równowagi Nasha. Następnie wyznaczono te obiekty numerycznie. Okazało się, że dokładność wyznaczonych numerycznie trajektorii optymalnych jest większa od dokładności wyznaczonych numerycznie funkcji wartości. Ta trochę zaskakująca obserwacja dotyczyła oczywiście pewnych trajektorii. Wyjaśnienie tego fenomenu znajduje się w Theorem 50 i Theorem 53 i dotyczy szerokiej klasy zagadnień z czasem dyskretnym.

W rozdziale 6 rozważana jest wersja modelu Levhari-Mirman z czasem ciągłym i nieskończonym horyzontem. W tym modelu zarówno sterowanie socjalnie optymalne jak również równowagi Nashi są stałe. Stałe sterowania optymalne są postaci $\frac{r}{n}$, gdzie e^{-r} jest czynnikiem dyskontowym i n jest liczbą graczy. Profil równowagi Nasha składa się ze stałych równych r. Oznacza to, że w równowadze Nasha każdy gracz łowi n-krotnie więcej ryb niż przy sterowaniu optymalnym socjalnie. Trajektorie odpowiadające równowadze Nasha i określające zmianę poziomu zasobów w czasie szybko zmierzają do zera. Znacznie szybciej od trajektorii odpowiadających strategiom optymalnym, które zbiegają do zera jedynie w przypadku gdy $r > \xi$. W rozdziale 6.2 opisano system podatkowo-subsydialny, który pozwala zwiększyć wypłaty optymalne socjalnie. W rozdziale 6.3 podjęto próbę konstrukcji mechanizmów, które samoczynnie, czyli bez udziału zewnętrznego regulatora, będą skłaniać graczy do ograniczania połowów do poziomu wyznaczonego przez optimum socjalne. Po raz pierwszy w rozprawie zakłada się, że gracze podejmując decyzje o wielkości połowu znają historię zachowań pozostałych graczy, a nie tylko aktualną biomasę ryb. Zakłada się, że gracze umawiają się stosować strategie socjalnie optymalne tak długo jak długo wszyscy pozostali gracze dotrzymują umowy. W razie, gdy jeden z pozostałych graczy odstępuje od umowy, to pozostali gracze przechodzą na strategie wyznaczone przez równowagę Nasha. W pracy zakłada się ponadto, że informacja o zachowaniach pozostałych graczy jest opóźniona o stałą ε. Tego typu strategia jest analogiczna do strategii typu " palec na cynglu" w grach powtarzanych. W Theorem 58 wyznacza się maksymalną wartość opóźnienia, do której opisane strategie są czymś w rodzaju równowagi Nasha, co nazywane jest w pracy samoregulującym mechanizmem.

Celem pracy było wyznaczenie strategii socjalnie optymalnych oraz strategii będących równowagami Nasha oraz porównanie odpowiadających im trajektorii. Porównanie trajektorii, jak zwykle w tego typu problemach, pokazuje, że strategie równowagi Nasha dają graczom niższe wypłaty, a dodatkowo prowadzą do rabunkowego wyeksploatowania zasobów. Jednym z centralnych zagadnień teorii gier jest poszukiwanie remedium na ten problem występujący w literaturze pod nazwą *tragedy of commons*. Cel pracy został zrealizowany jednak tylko częściowo. W każdym z rozważanych modeli została wyznaczona funkcja wartości oraz sterowanie optymalne w zagadnieniu optimum socjalnego. Autor napotkał jednak na zasadnicze trudności z wyznaczeniem równowagi Nasha. Trudności te mnie nie zaskoczyły. Wyznaczenie równowagi Nasha w grach różniczkowych wiąże się z rozwiązaniem układu równań cząstkowych pierwszego rzędu. Problemy te są matematycznie na tyle skomplikowane, że nie jest do dziś znana definicja słabego rozwiązania, która dawałaby jednoznaczność rozwiązania. Zupełnie inna sytuacja ma miejsce w problemach sterowania optymalnego, w których funkcja wartości jest opisana jednym równaniem Hamiltona-Jacobiego- Bellmana. Rozwiązania lepkościowe wprowadzone przez Crandalla-Lionsa na początku lat 80-tych XX wieku oraz ich liczne modyfikacje, pozwalają jednoznacznie opisać funkcję wartości. Problemy z wyznaczeniem funkcji wartości dla równowagi Nasha wystąpiły w modelu liniowo-kwadratowym z czasem dyskretnym dla skończonej ilości graczy i nieskończonego horyzontu czasowego. Przewidując określoną postać rozwiązania udało się jedynie uzasadnić, że funkcja wartości nie jest postaci opisanej w Theorem 18. Rozważania z rozdziału 3 mają na celu poparcie tezy o nieregularności funkcji wartości w grach liniowo-kwadratowych z ograniczonymi zbiorami parametrów sterujących. Tytuł rozdziału 3 oraz podrozdziału 2.2.1 jest delikatną krytyką stosowania wyników matematycznych w pracach ekonomicznych bez sprawdzania, czy spełnione są założenia stosowanego twierdzenia. Autor rozprawy litościwie nie cytuje setek prac ekonomicznych, w których argumentuje się, że dana funkcja jest funkcją wartości sprawdzając jedynie równanie Bellmana i pomijając warunki brzegowe. Problemy ze znalezieniem postaci analitycznej funkcji wartości sugerują zastosowanie metod numerycznych. Interesujące są rozważania z rozdziału 5, w którym porównano wyniki uzyskane analitycznie z wynikami przybliżonymi. W rozdziale 5 podjęto próbę wyjaśnienia fenomenu polegającego na tym, że obarczone znacznym błędem przybliżone funkcje wartości pozwalają wyznaczać bardzo dokładne trajektorie socjalnie optymalne dla dużej rodziny warunków początkowych. Rozważania te, początkowo przeprowadzone dla modelu Levhari-Mirmana ze skończonym horyzontem, są następnie w Theorem 50 i Theorem 53 sformułowane dla ogólnej klasy zagadnień optymalizacyjnych z czasem dyskretnym. Jednakże w mojej ocenie najbardziej interesująca jest podjęta w ostatnim rozdziale próba stworzenia mechanizmów samoregulujących w grach dynamicznych w oparciu o strategie graczy opierające się na informacji o historii gry. Przedstawione wyniki w tym zakresie mają jeszcze niepełny charakter, ale jestem zdania, że kontynuacja badań w tym kierunku, może przynieść rezultaty dużej rangi. Oceniana rozprawa stanowi oryginalny wkład w rozwiązanie postawionych w pracy problemów. Rozprawa jest zredagowana poprawnie, choć natrafiłem w niej na miejsca, w których usterki redakcyjne utrudniły mi lekturę na tyle, że musiałem prosić o dodatkowe wyjaśnienia. Praca jest poprawnie i zrozumiale zredagowana od strony językowej.

Reasumując, stwierdzam, że recenzowana praca spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. W związku z tym wnoszę o dopuszczenie mgr Rajani Singh do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Sławomir Plaskacz