



WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

INSTYTUT MATEMATYCZNY  
pl. Grunwaldzki 2/4  
50-384 Wrocław

tel. +48 71 375 74 01 | +48 71 328 07 17

dyrekcja@math.uni.wroc.pl | www.math.uni.wroc.pl

Prof. dr hab. Krzysztof Dębicki

Wrocław, 19.06.2019

## Recenzja pracy doktorskiej mgra Rafała Mellera “Two-sided bounds of moments of random chaoses – real and vector case”

Przedstawiona do oceny praca doktorska magistra Rafała Mellera, licząca 124 strony, składa się z pięciu rozdziałów, dodatku zawierającego przegląd ważniejszych klasycznych wyników używanych w rozprawie oraz bibliografii. Praca napisana została w języku angielskim.

Tematyka przedłożonej rozprawy motywowana jest poszukiwaniem dwustronnych oszacowań momentów zmiennych losowych o wartościach w przestrzeni Banacha, które można przedstawić jako wieloliniowe formy losowe

$$Y = \sum_{i_1, \dots, i_d} a_{i_1, \dots, i_d} X_{i_1} \dots X_{i_d},$$

gdzie  $a_{i_1, \dots, i_d}$  należą do przestrzeni Banacha, a  $X_1, X_2, \dots$  są wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowym spełniającymi pewne warunki na rozkład. Formy te w literaturze noszą nazwę chaosów losowych rzędu  $d \in \mathbb{N}$ . W szczególności celem rozprawy jest znalezienie ”dającego się wyznaczyć” wyrażenia  $H$ , które zależy od  $p$ ,  $(a_{i_1, \dots, i_d})_{i_1, \dots, i_d}$  i rozkładu  $X_1, X_2, \dots$ , dla którego

$$C(d)^{-1}H \leq \|Y\|_p \leq C(d)H,$$

gdzie  $C(d)$  jest pewną stałą, która zależy jedynie od rzędu chaosu  $d$ .

Badanie własności chaosów losowych jest ważnym i aktywnie analizowanym zagadnieniem współczesnej probabilistyki. Oprócz znaczenia w rozwoju teorii rachunku prawdopodobieństwa, jak na przykład w aproksymacji całek stochastycznych czy pewnych zagadnieniach związanych z rozwinięciami Fouriera, chaosity pojawiają się w wielu problemach inspirowanych na przykład modelami fizycznymi czy statystycznymi. Zagadnienia te wpisują się w nurt badań prowadzonych przez warszawską szkołę probabilistyczną.

Przedstawioną do oceny rozprawę doktorską podzielić można na dwie, powiązane ze sobą części:

- część w której analizie poddano problem oszacowań momentów dla nieujemnych chaosów losowych oraz pewnej klasy chaosów losowych rzędu dwa (Rozdziały 1, 2);
- część dotyczącą oszacowań momentów dla chaosów o wartościach w przestrzeni Banacha (Rozdziały 3, 4, 5).

Rozdział 1 rozprawy doktorskiej Rafała Mellera poświęcony jest dwustronnym oszacowaniom jednorodnych tetraedrycznych chaosów przy założeniu, że  $a_{i_1, \dots, i_d} \geq 0$  oraz  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  są niezależnymi nieujemnymi zmiennymi losowymi. Zakładając, że

$$\|X_i\|_{2p} \leq C \|X_i\|_p \tag{1}$$

dla każdego  $p \geq 1$  oraz pewnego  $C > 1$ , autor zauważył, iż  $X_i$  jest *bliskie* produktowi  $\log(C)$  niezależnych zmiennych losowych o logarytmicznie wklęsłych ogonach. Pozwoliło to na redukcję rozważanego problemu do wyniku Latały i Łochowskiego [19], formalnie rozszerzając wyniki uzyskane w [19] dla  $(X_i)$  o log-wklęsłych ogonach do spełniających (1).

W Rozdziale 2 autor skoncentrował się na znalezieniu oszacowań dla form kwadratowych ( $d = 2$ ) ewaluowanych na niezależnych symetrycznych zmiennych losowych spełniających (1). Główny wynik, którym jest Twierdzenie 2.1.1, uogólnia pracę Latały [17], wykorzystując podobny pomysł do użytego w Rozdziale 1, czyli zastąpienie zmiennych losowych  $X_i$  przez odpowiednio dobrany produkt niezależnych zmiennych losowych o log-wklęsłym ogonie. Dowód polegał w tym przypadku na zdecydowanie subtelniejszej analizie, wymagającej nie tylko umiejętności zredukowania problemu do dających się zastosować wyników z pracy [1], ale też paru oryginalnych pomysłów.

Rozdział 3 rozprawy doktorskiej Rafała Mellera poświęcony jest analizie dwustronnych oszacowań dla momentów chaosów gaussowskich rzędu 2 o wartościach wektorowych. Przy założeniu iż w danej przestrzeni Banacha wartość oczekiwana gaussowskiej formy kwadratowej dominuje wartość oczekiwaną odpowiedniej formy liniowej, autorowi udało się znaleźć dwustronne oszacowania badanych momentów. Założenie to spełniają między innymi przestrzenie  $L_r$ . Ważnym i eleganckim wynikiem jest Twierdzenie 3.1.7, dotyczące nierówności koncentracyjnej typu Hansona-Wrighta dla form kwadratowych o wartościach w przestrzeni Banacha ewaluowanych na niezależnych subgaussowskich zmiennych losowych. Tego typu wyniki są niezwykle użyteczne i mają szerokie zastosowanie, na przykład w statystyce. Ten fragment pracy subiektywnie uznałbym za szczególnie interesujący.

Rozdział 4 dotyczy badania momentów chaosów gaussowskich rzędu większego niż 2 w przestrzeniach Banacha. Autor sprytnie zastosował tu ideę z pracy Latały [16] wprowadzenia zmiennych gaussowskich indeksowanych przez grupę indeksów. Pozwoliło to na uzyskanie górnego oszacowania  $p$ -tej normy chaosu dla dowolnej przestrzeni Banacha. Dolne oszacowania udało się otrzymać przy założeniach analogicznych to tych, które poczyniono w Rozdziale 3. Pozwoliło to na uzyskanie dwustronnych oszacowań na przykład w przestrzeniach  $L_r$ . Dodatkowo, rozwijając techniki wypracowane przez Adamczaka i Wolffa w [2], udało się rozszerzyć wynik na ogólny wielomian o współczynnikach w przestrzeniach Banacha ewaluowany na niezależnych zmiennych gaussowskich.

Celem Rozdziału 5 jest zbadanie momentów losowych form kwadratowych dla symetrycznych zmiennych losowych o log-wklęsłych ogonach oraz współczynnikach o wartościach w danej przestrzeni Banacha. Głównym wynikiem tego rozdziału jest Twierdzenie 5.1.3 dające dwustronne oszacowania na  $p$ -tą normę chaosu uniezależnionego, przy założeniu, że współczynniki formy są o wartościach w  $L_r$ , a forma jest ewaluowana na zmiennych losowych subgaussowskich. Technika dowodu polega na subtelnej kombinacji idei wypracowanych w Rozdziale 3 w połączeniu z [1].

Metodyka oraz techniki dowodowe użyte w przedstawionej do recenzji pracy doktorskiej wymagały opanowania zaawansowanych narzędzi teoretycznego rachunku prawdopodobieństwa. Użyte techniki kontynuują, a w niektórych miejscach znacznie rozszerzają idee wypracowane przez znanych probabilistów zajmujących się zagadnieniami estymacji momentów chaosów losowych. Autor wykazał się nie tylko biegłością w stosowaniu istniejących już narzędzi ale też kreatywnością w szuka-

niu własnych dróg dowodowych. Wiele z oszacowań wymagało znacznego nakładu pracy i wytrwałości w przeprowadzeniu wielopietrowych dowodów. Wyniki przedstawione w Rozdziałach 1 i 2 zostały opublikowane w dobrych czasopismach o zasięgu międzynarodowym. Rezultaty zawarte w Rozdziałach 4, 5 mają dużą szansę na opublikowanie w bardzo dobrych międzynarodowych czasopismach.

Praca napisana jest starannie, zarówno pod względem formalnym, jak i językowym. Nieliczne, zauważone przeze mnie błędy nie mają wpływu na zdecydowanie pozytywną ocenę w tym względzie. Głównym mankamentem, który utrudnił czytanie pracy, było w niektórych miejscach zbyt częste stwierdzanie iż pewne oszacowania są *łatwe* do zauważenia lub przeliczenia. Jest tak zapewne dla osoby wprawnej w technikach stosowanych w rozprawie, recenzentowi niekiedy zajęło to nieco więcej czasu.

Rozprawa doktorska magistra Rafała Mellera spełnia z nawiązką wszystkie wymagania stawiane pracom doktorskim. Autor uzyskał oryginalne, ciekawe i niebanalne wyniki.

**Wnoszę o dopuszczenie magistra Rafała Mellera do dalszych etapów przewodu doktorskiego oraz uznanie przedstawionej pracy doktorskiej za wyróżniającą się.**

*Wybaf degh2*