

dr hab. Zbigniew S. Szewczak
Katedra Teorii Prawdopodobieństwa
i Analizy Stochastycznej
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, 14.04.2019

Recenzja rozprawy doktorskiej

*Dwustronne oszacowania momentów wieloliniowych form losowych -
przypadek rzeczywisty i wektorowy*

magistra Rafała Mellera

dla Rady Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Rozprawa doktorska przedłożona Radzie Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW dotyczy dwustronnych oszacowań momentów wieloliniowych, d -wymiarowych (jednorodnych) form losowych typu

$$S_n = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_d=1}^n a_{i_1, i_2, \dots, i_d} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_d}$$

od niezależnych, rzeczywistych lub wektorowych zmiennych losowych $\{X_i\}$. Oszacowania, w przypadku rzeczywistym, dla wymiaru $d = 1$ (zmiennie symetryczne) podał Latała a dla wymiaru $d = 2$ oraz $d = 3$ (zmiennie \log -wkłęsłe) odpowiednio Latała oraz Adamczak i Latała. Dla wymiarów wyższych problem jest otwarty. W przypadku wektorowym znane są oszacowania dla chaosów gaussowskich.

Zagadnienia tego typu są fundamentalne w teorii prawdopodobieństwa i statystyce. W najlepiej zbadanym i najprostszym przypadku rzeczywistych sum od niezależnych zmiennych losowych mamy dwustronne oszacowanie Chinczyna, Marcinkiewicza-Zygmunda oraz Rosenthala i są to oszacowania optymalne. Rozszerzeniem nierówności Chinczyna są, dla form liniowych, wyniki Gluskińa-Kwapienia dla ogonów \log -wkłęsłych i Hitczenki,

Montgomery-Smith'a, Oleszkiewicza dla ogonów *log*-wypukłych a także Latały dla zmiennych symetrycznych. W przypadku wektorowych zmiennych losowych są oszacowania dwustronne uzyskane przez Latałą i Strzelecką.

Istnieją także warianty nierówności Chinczyna, Marcinkiewicza–Zygmun-
da oraz Rosenthala dla zmiennych losowych o zależności martyngałowej, sil-
nej zależności a także zależności stowarzyszenia. Oszacowania te pozwalają
uzyskać ważne twierdzenia graniczne w tym: *mocne i słabe prawa wielkich*
liczb, prawa iterowanego logarytmu czy też słabą oraz funkcjonalną zbieżność
do procesów nieskończenie podzielnych. Podobnie jak w klasycznym przypad-
ku podstawową rolę odgrywają tu nierówności dla *maksimów sum* zmien-
nych losowych w tym nierówności typu: Lévy–Ottaviani, Kahane–Hoffmann-
Jørgensen, Kolmogorov–Bernstein–Hoeffding–Bennett, Kolmogorov–Hájek-
Rényi oraz odwrotna nierówność Kołmogorowa ¹. Nierówności te posiadają
także swoje wektorowe odpowiedniki. Natomiast dwustronne nierówności dla
momentów czy ogonów chaosów od zależnych zmiennych losowych (np. mar-
kowskich, *m*-zależnych, słabo lub silnie zależnych albo stowarzyszonych),
według dostępnej mi wiedzy, są dość słabo zbadane.

★★★

Praca składa się ze Wstępu, pięciu rozdziałów, Dodatku oraz bibliografii
(33 pozycje). Wstęp zawiera opis najważniejszych wyników zawartych w ko-
lejnych rozdziałach zaś w Dodatku przytoczone są rezultaty innych autorów
wykorzystane w rozprawie.

Rozdział pierwszy jest kopią publikacji dysertanta ze *Statistics and Pro-
bability Letters*. Kluczowe lematy 1.2.1 i 1.2.3 pozwalają na aproksymowanie
ogona hiperkontraktywnej zmiennej X (tzn. $\|X\|_{2p} \leq 2^k \|X\|_p$, $p \geq 1$), z
góry i dołu przez ogon k -produktów niezależnych *log*-wkłęsłych zmiennych
losowych. Wraz z wynikiem Latały i Łochowskiego oraz twierdzeniem Kwa-
pienia o uniezależnianiu (decoupling) chaosów daje to dwustronne oszacowa-
nia momentów chaosów symetrycznych i tetraedrycznych. Łatwe zastosowa-
nie nierówności Czebyszewa, Markowa oraz Zygmun-
da–Paley'a prowadzi do oszacowań ogonów dla takich chaosów odpowiednio z góry oraz z dołu.

Rozdział drugi dotyczy oszacowań ogonów i momentów chaosów dwuwymiarowych i jest tożsamy z publikacją autora (online) w *Studia Mathematica*. Główny rezultat (Twierdzenie 2.1.1) uogólnia rezultat Latały z 1999

¹por. R. C. Bradley, Introduction to strong mixing conditions, Kendrick Press, 2007;
Z. Lin, Z. Bai, Probability inequalities, Springer, 2010 oraz B. Bercu et al., Concentration
inequalities for sums and martingales, Springer, 2015

roku także opublikowany w *Studia Mathematica*. Wykorzystuje się tu idee dysertanta ze wspomnianej wyżej pracy opublikowanej w *Statistics and Probability Letters*, a także rezultaty Gluski-Kwapienia, Latały-Łochowskiego i Adamczaka-Latały. Autor dowodzi (Twierdzenie 2.3.1) dwustronnego oszacowania w przypadku $d = 1$ a także, przy pomocy rezultatu Latały i Strzeleckiej, dowodzi oszacowania dla wartości oczekiwanej od supremum kombinacji liniowych zmiennych losowych. Kluczowy Lemat 2.2.4, który jest uogólnieniem lematu 1.2.3 z poprzedniego rozdziału, pozwala na uzyskanie eleganckich dwustronnych oszacowań na ogony i momenty dla chaosów dwuwymiarowych od symetrycznych, hiperkontraktywnych zmiennych losowych (Twierdzenie 2.1.1 i Wniosek 2.1.4). Należy podkreślić, że dotąd opublikowano zaledwie parę prac dotyczących problemu oszacowania form kwadratowych. Wyniki uzyskane w rozdziale drugim w sposób znaczący uzupełniają naszą wiedzę o chaosach dwuwymiarowych oraz świadczą o biegłości dysertanta w posługiwaniu się zaawansowanymi technikami szacowania momentów chaosów.

Rezultaty rozdziału trzeciego są wspólne z R. Adamczakiem i R. Latałą (arXiv: 1811.00353v1). Najważniejszy wynik tego rozdziału (Twierdzenie 3.1.3) dotyczy oszacowań dwustronnych momentów chaosów gaussowskich (rzędu $d = 2$) o wartościach wektorowych. Wynik ten autorzy zastosowali do uzyskania nierówności wykładniczej typu Hansona-Wright'a dla form kwadratowych od niezależnych zmiennych α -subgaussowskich o wartościach w przestrzeni Banacha (Twierdzenie 3.1.7)². Prezentowane dowody tych rezultatów świadczą o bardzo dobrym opanowaniu trudnych metod oszacowań wartości oczekiwanej od supremów norm chaosów gaussowskich (Proposition 3.5.12).

Współautorami rozdziału czwartego są także R. Adamczak i R. Latała. Rozdział ten zawiera wyniki dotyczące wektorowych chaosów (dowolnego rzędu) od niezależnych zmiennych gaussowskich oraz wykładniczych. Głównym rezultatem jest oszacowanie dwustronne momentów (Twierdzenie 4.2.1) oraz ogonów (Twierdzenie 4.2.4) wektorowego chaosu gaussowskiego. (Twierdzenie 4.36). Rezultaty tego rozdziału, choć zaawansowane rachunkowo, to z pewnością stanowią podstawę do dalszej analizy otwartego problemu oszacowań momentów chaosów wymiaru $d > 3$.

²wartym odnotowania jest rezultat obejmujący przypadek jednostajnie ergodycznych łańcuchów Markowa w: R. Adamczak, A note on the Hanson-Wright inequality for random vectors with dependencies, ECP 20 72 (2015)

W rozdziale piątym autor podejmuje próbę przeniesienia rezultatów Latały dla chaosów dwuwymiarowych na przypadek wektorowy. Wykorzystane są tu idee z rozdziału trzeciego w tym redukcja problemu oszacowania momentów do oszacowania wartości oczekiwanej supremów odpowiednich procesów.

★★★

Ponad stustronicowa praca jest nieznacznie przereklamowaną kopią innych prac i towarzyszy jej autoreferat w którym autor streszcza jej zawartość. W związku z tym dysertacja nie jest łatwa w lekturze choć trzeba to przyznać że jest poprawna językowo. Pewien niedosyt budzi natomiast brak zastosowań uzyskanych oszacowań momentów i ogonów do badania zbieżności chaosów.

Z drugiej strony autor dysertacji, na tym etapie swojej matematycznej ewolucji, wykazał się pomysłowością (np. Lemat 1.2.3 o redukcji do przypadku zmiennych losowych *log-wklęsłych*) oraz niezłą biegłością w posługiwaniu się klasycznymi nierównościami probabilistycznymi. Tworzy to pozytywne rokowania dla rozwoju naukowego, gdyż w mojej ocenie realizowana tematyka ma całkiem niemały potencjał badawczy (zależne zmienne losowe). Dowody wydają się być optymalne i jest wrażenie, że wyniki w sposób znaczący uzupełniają naszą wiedzę o dwustronnych oszacowaniach ogonów i momentów chaosów losowych. Mimo tak obszernego materiału liczba usterek i literówek nie jest nadmierna. Niektóre z nich (nie mające zresztą większego wpływu na ocenę merytoryczną pracy) zamieszczono poniżej.

p.1, l.-13 oznaczenie $X \sim Y$ jest używane także w znaczeniu $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$ co jest w kolizji z oznaczeniem w linii 13 (por. p.28, (2.13));

p.15, -9: niepotrzebny);

p.16, l.7 (i dalej): Powinno być *Markov's inequality*;

p.29, l.-5: a jest niezdefiniowane;

p.39, l.-7: B_1^n, B_2^n są niezdefiniowane;

p.98, l.10: Powinno być a_{i_1, \dots, i_d} ;

★★★

Uważam, że rozprawa doktorska *Dwustronne oszacowania momentów wieloliniowych form losowych - przypadek rzeczywisty i wektorowy* magistra Rafała Mellera spełnia wymagania ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym i może być podstawą do nadania autorowi stopnia naukowego doktora nauk matematycznych. Dlatego wnoszę o przyjęcie tej rozprawy i dopuszczenie magistra Rafała Mellera. do dalszych etapów przewodu doktorskiego.