Wrocław, 14 grudnia 2020r.

Zbigniew J. JUREK
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ
pt. *"Estimates of suprema of stochastic processes with application of the chaining method"* mgr. Rafała Martynka,
dla Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytetu Warszawskiego.

Problemtykę rozprawy doktorskiej Pana mgr. Rafała Martynka pt. *"Estimates of suprema of stochastic processes with application of the chaining method"*, przygotowanej pod kierunkiem dr. hab. Witolda Bednorza, można wywieść z lat 70-tych i 80-tych ub. wieku, kiedy to bardzo aktywnie rozpoczęto badania probabilistyczne na przestrzeniach Banacha i związaną z nimi geometrią. W tym m.in., badanie zbieżności szeregów elementów losowych o wartościach w przestrzeniach Banacha. Wiążę się to z takimi matematykami jak m.in., A. de Acosta, X. Fernique, E.Gine, J. Hoffmann-Jorgensen, M. Marcus, G. Pisier, M. Talagrand, a w Polsce m.in. S. Kwapień, K. Urbanik i W. Woyczyński. Tematyka ta i jej uogólnienia są ciągle ważnym i rozwijanym nurtem współczesnych rozważań probabilistyczno-funkcjonalnych, o czym świadczy choćby monografia Michaela Talagranda; poz. [32] (i [33]) w bibliografii rozprawy.

1. Omówienie głównych wyników rozprawy.

Omawiana rozprawa składa się z pięciu rozdziałów, ze streszczenia i bibliografii liczącej 35 pozycji; w tym trzy wspólne prace doktoranta z jego promotorem; łącznie to 81 stron plus strony i-vii.

Centralnym zagadnieniem badawczym jest znajdywanie górnych i dolnych oszacowań dla supremum procesu stochastycznego $(X_t)_{t\in T}$, tj. wyrażeń postaci

$$S_X(T) \equiv \mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] := \sup_{F\subset T} \mathbb{E}[\sup_{t\in F} X_t], \quad \text{skonczony } F \subset T,$$

dla przeliczalnego zbioru T, który ma strukturę liniowo-metryczną.

Narzędziem badawczym (porównawczym) dla zbioru indeksów T, z metryką d, są funkcjonały

$$\gamma_\alpha(T,d) := \inf_{(\mathcal{A}_n)} \big(\sup_{t\in T} \sum_{n\geq 0} 2^{n/\alpha} \Delta(A_n(t))\big), \ \alpha > 0,$$

gdzie kres dolny jest po tzw. zagnieżdżonych (nested) partycjach $\mathcal{A}_n, n \geq 0$, zbioru T, takich, że $card(\mathcal{A}_0) = 1$ oraz $card(\mathcal{A}_n) \leq 2^{2^n}, n \geq 1$. Ponadto, $\Delta(A_n(t))$ to średnica tego elementu partycji, który zawiera $t \in T$.
[Funkcjonały powyższe mają początki w pracach Fernique'a (1975) i Talagranda (1987); w bibliografii są to pozycje [8] i [28], odpowiednio.]

W początkowych latach oszacowania supremów sum były znajdywane dla procesów Gaussowskich i procesów Bernoulliego. W rozprawie badane są procesy nieskończenie podzielne, dla których istotnym były ich szeregowe reprezentacje (procesy punktowe) opisane przez J. Rosinskiego (1990); (praca [23] w bibiografii).

Głównym wynikiem rozprawy (Rozdział 4, Theorem 28) jest dowód przypuszczenia/hipotezy Michaela Talagranad (pozycja [32] w bibliografii), że dla procesu nieskończenie podzielnego pewne oszcacowania jego supremum nie zależą od jego miary Lévy'ego ν, tzn., że ν nie musi spełniać technicznego warunku $H(C_0, \delta)$, podanego w Definicji 4, na str. 50 omawianej rozprawy; (w procesie Lévy'ego ν jest miarą wielkości i ilości skoków procesu.)

Dokładniej, w rozprawie dowiedziono następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Dla procesu postaci $X_t := \sum_{i\geq 1} \epsilon_i t(Z_i)$, gdzie zmienne losowe $T \ni t : \Omega \to \mathbb{R}$ spełniają warunek $\int_\Omega (t^2(\omega) \wedge 1)\nu(d\omega) < \infty$ oraz $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ są zmiennymi losowymi Rademachera, istnieje rozkład zbioru indeksów $T \subset T_1 + T_2$ (suma Minkowskiego) taki, że dla pewnej stałej L zachodzą nierówności*
$\gamma_2(T_1, d_2) + \gamma_1(T_1, d_\infty) \leq L\,\mathbb{E}[\sup X_{t\in T}]$ *oraz* $\mathbb{E}[\sup_{t\in T_2} |X_t|] \leq L\,\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t]$.

W dowodzie ważnym krokiem jest skonstruowanie dopuszczalnego ciągu partycji do oszacowania powyższych funkcjonałów γ_α; w rozprawie to Twierdzenie 21, na str. 51.

W Rozdziale 5, str. 73^3 (trzecia linia od góry), Autor pisze : *As noticed by M. Talagrand the contents of Chapter 4 apply not only to infinitely divisible process.* To pozwala zauważyć, że niektóre rozumowania z Rozdziału 4 nie zależą od struktury procesów nieskończenie podzielnych i mogą być zastosowane do innych procesów.

W tym kontekście, innym ważnym wynikiem z rozprawy są dwustronne oszacowania dla supremów procesów empirycznych. Mianowicie, dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$, ograniczonego i przeliczalnego zbioru T funkcji $f \in L^2(\mu)$ oraz dla $X_1, X_2, ..., X_N$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie μ, definiujemy supremum procesu empirycznego:

$$S_N(T) := \mathbb{E}[\sup_{f\in T} \Big| \sum_{i\leq N} \big(f(X_i) - \int f d\mu\big) \Big|],$$

dla którego dowiedziono (Rozdział 5, Theorem 33) oszacowania:

Twierdzenie 2. *Dla zbioru $T \subset L^2(\mu)$ funkcji f, o średniej zero, istnieje stała L i rozkład $T \subset T_1 + T_2$, gdzie $0 \in T_1$, taki że*

$$\gamma_2(T_1, d_2) \leq L\, N^{-1/2} S_N(T);$$
$$\gamma_1(T, d_\infty) \leq L S_N(T); \qquad \mathbb{E}[\sup_{f \in T} \sum_{i \leq N} |f(X_i)|] \leq L S_N(T),$$

gdzie d_2 jest metryką w $L_2(\mu)$, a d_∞ w $L^\infty(\mu)$.

[Uwaga: w rozprawie autor w/w zbiór funkcji f oznacza przez $\mathcal{F}$!]

Podobnie jak powyżej autor znajduje analogiczne oszacowania dla procesów sektorowych (selector processes). Mianowicie, dla $0 < p < 1$ i ciągu niezależnych i jednakowo-rozłożonych zmiennych losowych Bernoulliego δ_i, $i \leq M$, z prawdopodobieństwem sukcesu p, tzn. $P(\delta_i = 1) = p$ i $P(\delta_i = 0) = 1 - p$, definiujemy oczekiwane supremum procesu

$$S_M(T) := \mathbb{E}[\sup_{\mathbf{t} \in T} |\sum_{i \leq M} t_i(\delta_i - p)|], \text{ gdzie } T \text{ jest zbiorem ciągów } \mathbf{t} = (t_i).$$

Dla powyższych sum, w Rozdziale 5, str.77, Theorem 34, dowiedziono następujących oszacowań:

Twierdzenie 3. *Istnieją stała L i rozkład indeksów $T \subset T_1 + T_2$ taki, że*

$$\gamma_2(T_1, d_2) \leq L p^{-1/2} S_M(T);$$
$$\gamma_1(T_1, \delta_\infty) \leq L S_M(T); \qquad \mathbb{E}[\sup_{t \in T_2} \sum_{i \leq M} |t_i|\delta_i] \leq L S_M(T).$$

[Uwaga: w rozprawie powyższe δ to p, zaś $S_M(T)$ to $\delta(T)$.]

Rozdziały IV i V pochodzą z preprintu, poz. [4] w bibliografii, opublikowanego na arXiv, autorstwa doktoranta i jego promotora.

W Rozdziale II najpierw autor omawia oszacowania dla $S_G(T)$ (G= proces Gaussowski) i dla $S_B(T)$ (B= proces Bernoulliego), które pochodzą od Fernique'a i Talagranda. Następnie w Theorem 11, str. 23, dowodzi, że istnieje $\pi : T \to l^2$, dla której $S_B(T)$ szacuje się z góry i dołu w terminach funkcjonału $\gamma_B(T_1 + T_2)$, gdzie decompozycja T_1, T_2 jest podana poprzez π.

W Theorem 12, str. 27, udowodniono, że $S_B(\phi(T)) \leq K S_B(T)$ o ile $\phi := (\phi_i)$ spełnia pewnien techniczny warunek.

Ostatnia część tego rozdziału to odpowiedź na pytanie Krzysztofa Oleszkiewicza (z UW) o porównaniu słabych i mocnych momentów dla szeregów postaci $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \epsilon_k$, gdzie x_k są wektorami z (ośrodkowej) przestrzeni Banacha z własnością słabej dominacji; Corollaries 4 i 5, na str. 37, w rozprawie. Te i inne wyniki Rozdziału II pochodzą ze wspólnej pracy autora i jego promotora, tj. pozycja [5] w bibliografii rozprawy.

W Rodziale III, w Theorem 15, str. 40, udowodnione jest

Twierdzenie 4. *Niech funkcje $a_k : [0,1] \to [0,\infty)$ będą niemalejące, prawostronnie ciągłe, a $\epsilon_k, k = 1,2,..$ będą zmiennymi losowymi Rademachera. Wtedy dla dowolnych $n \geq 5$ i $u > 0$ zachodzi nierówność*

$$P(\sup_{t\in[0,1]} \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\epsilon_k \geq 8u) \leq 53\, P(\sum_{k=1}^{n} a_k(1)\epsilon_k \geq u)$$

Jest to pewne uogólnienie nierówności przewidywanej, w bardzo szczególnym przypadku, przez W. Szatzschneidera ok. 30 lat temu; pozycja [26] w bibliografii rozprawy. Powyższe twierdzenie można też wywieść z twierdzenia koncentracyjnego; w rozprawie to Theorem 16 na str. 41.

Te i inne wyniki z Rozdziału III rozprawy pochodzą ze wspólnej pracy doktoranta i jego promotora; pozycja [3] w bibliografii rozprawy.

Z powyższego przedstawienia wyników (Twierdzenia 1-4) widać jak bardzo istotnym była szeregowa reprezentacja badanego procesu. Często, szeregów zmiennych losowych Rademachera. Autor nie wspomina o sytuacjach gdzie proces stochastyczny byłby zadany, na przykład, całką losową (stochastyczną) czy byłby rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego. Takie zagadnienia, które wydają się być trudne, mogłyby mieć szerokie zastosowania aplikacyjne.

2. Ocena uzyskanych wyników w rozprawie. Praca jest napisana jasnym i poprawnym językiem (matematyki), a drobne uwagi redakcyjne, załączone oddzielenie, nie wypływają na ogólną ostateczną opinię. Na najwyższą ocenę zasługują uzyskane odpowiedzi na pytania, przypuszczenia, Michaela Talagranda, przytoczone powyżej. Talagrand jest wybitnym znawcą i współtwórcą tej teorii. Autor rozprawy wielokrotnie korzysta lub odnosi sie do jego dawnych i ostatnich wyników lub wprost dziękuje mu za jego wskazówki i komentarze; str. 16_6 czy str. 72_3. [Przypomnijmy, że bibliografia rozprawy doktorskiej liczy 35 pozycji, z czego 7 to prace Talagranda.]

Dowody wielu faktów i twierdzeń w rozprawie są dalece niebanalne, czy to w aspekcie rachunkowym czy koncepcyjnym. W kilku miejscach korzysta się z metod i twierdzen analizy funkcjonalnej oraz topologii, co dowodzi, że autor opanował znaczne obszary zaawansowanej matematyki.

[Warto podkreślić, że rozprawa doktorska mgr. Rafała Martynka wpisuje się długą historię badań, z tego obszaru, probabilistów Uniwersytetu Warszawskiego. Dowodzą tego przypomniane w recenzji wyniki, osoby i problemy matematyczne rozważane w warszawskim środowisku na przestrzeni wielu dekad.]

3. Konkluzja. Rozprawa doktorska mgr. Rafała Martynka zawiera bardzo wartościowe i nowe wyniki, które ponadto są odpowiedzią na pytnia i otwarte hipotezy wybitnych znawców problematyki szacowania średnich supremów sum niezależnych zmiennych losowych. Na rozprawę składają się trzy publikacje mgr. Rafała Martynka z jego promotorem, w których, zakładam, udział doktoranta był bardzo istotny, co dowodziłoby też jego umiejętności prowadzenia pracy naukowej, o którym to wymaganiu jest mowa w poniżej przytoczonym art. 13.1.

Konkludując, uważam, że rozprawa doktorska Pana mgr. Martynka spełnia wymagania art. 13.1 Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym z dn. 14 marca 2003r. i wnoszę o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z poważaniem,
Zbigniew J. Jurek