prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa

Warszawa 30 września 2020

Recenzja rozprawy doktorskiej

Compensated compactness and DiPerna-Majda measures

autorstwa pana magistra *Piotra Kozarzewskiego*

Złożona do oceny rozprawa doktorska **Compensated compactness and DiPerna-Majda measures** autorstwa pana magistra *Piotra Kozarzewskiego* dotyczy bardzo istotnych tematów współczesnego rachunku wariacyjnego. Rozprawa dotyka hipotezy Morrey'a, dostarcza charakteryzacji słabych granic nieliniowości z niegładką funkcją stanu oraz opisuje Γ-granicę funkcjonałów związanych z cienkimi strukturami, używając bardzo subtelnych narzędzi rachunku wariacyjnego. Cała rozprawa składa się z wprowadzenia oraz trzech istotnych rozdziałów opartych na dwóch pracach samodzielnych doktoranta (jedna z nich już się ukazała), na pracy wspólnej z prof. Agnieszką Kałamajską oraz na dwóch pracach wspólnych z prof. Elvirą Zappale. Przejdę teraz do szczegółowego omówienia istotnych rozdziałów rozprawy.

Rozdział drugi rozprawy jest poświęcony badaniom wokół hipotezy Morrey'a. Quasiwypukłość funkcji, o której mówi wspomniana hipoteza, to własność bardzo trudna do sprawdzenia i dlatego pojawiają się w literaturze inne pojęcia wypukłości. Na przykład wypukłość rzędu jeden jest prostą geometryczną własnością, którą można nietrudno sprawdzić. W 1952 roku Morrey przypuszczał że oba wspomniane pojęcia wypukłości są równoważne. Od 1992 roku wiadomo, że tak nie jest dla wymiaru przestrzennego $n \geq 3$. Przypadek $n = 2$ w hipotezie Morrey'a pozostaje otwarty do dzisiaj. W 2003 roku A. Kałamajska zdefiniowała nowe pojęcie wypukłości, tak zwaną tetrahedralną wypukłość i udowodniła, że klasa funkcji posiadających tą własność zawiera funkcje quasiwypukłe. W dużym uproszczeniu tetrahedralna wypukłość polega na sprawdzeniu, czy rozważana funkcja na czworościanach o trzech krawędziach równoległych do osi kanonicznego układu współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ jest niewiększa od swojego jednoznacznie wyznaczonego rzutu na 7-wymiarową przestrzeń tak zwanych wielomianów tetrahedralnie afinicznych. Pojęcie to jest naturalnym uogólnieniem klasycznej wypukłości funkcji rzeczywistych gdzie dokonujemy rzutu na przestrzeń wielomianów stopnia co najwyżej jeden i porównujemy wykresy na odcinku. Główny pomysł doktoranta w tej części rozprawy polegał na wprowadzeniu dwóch nowych pojęć wypukłości: tak zwaną tetrahedralną poliwypukłość i zredukowaną tetrahedralną poliwypukłość. W 1983 roku J. Ball

wprowadził pojęcie poliwypukłości, które otworzyło drogę metodom bezpośrednim rachunku wariacyjnego w nieliniowej teorii sprężystości. Pomysł J. Balla, z dzisiejszego punktu widzenia, był bardzo prosty. Energia sprężysta była nazywana poliwypukłą, jeżeli dawała się przedstawić w postaci złożenia funkcji wypukłej od obiektów słabo ciągłych tzn. od poszczególnych składowych gradientu deformacji oraz od wyznacznika i minorów rzędu dwa. Doktorant w swojej rozprawie powtarza pomysł J. Balla i mówi, że funkcja nazywa się tetrahedralnie poliwypukła jeżeli daje się przedstawić w postaci złożenia funkcji wypukłej od bazowych wielomianów tetrahedralnie afinicznych. Nieco szerszą klasę tworzą fukcje posiadające zredukowaną własność tetrahedralnej poliwypukłości. Doktorant zakłada, że funkcje takie dają się przedstawić w postaci złożenia funkcji wypukłej od wielomianów tetrahedralnie afinicznych stopnia jeden i od sumy wszystkich bazowych wielomianów tetrahedralnie afinicznych stopnia dwa. Warto w tym miejscu wspomnieć, że wspomniana suma jest wyznacznikiem pewnego symetrycznego gradientu. Jeden z głównych wyników tej części rozprawy to twierdzenie porównujące wprowadzone pojęcia wypukłości z innymi wypukłościami. Doktorant dowodzi, że zachodzą następujące implikacje
(f ma zredukowaną własność tetrahedralnej poliwypukłości) $\Rightarrow$ (f jest tertahedralnie poliwypukła) $\Rightarrow$ (f jest quasiwypukła) $\Rightarrow$ (f jest tetrahedralnie wypukła) $\Rightarrow$ (f jest wypukła po każdej zmiennej oddzielnie).
Oczywiście pierwsza i ostatnia implikacja nie zachodzą w drugą stronę. Doktorant dowodzi, że druga implikacja nie zachodzi w drugą stronę wykorzystując słynny już w rachunku wariacyjnym przykład z pracy Alibert, Dacorogna z 1992 roku. Ponadto w tym rozdziale rozprawy pojawia się pojęcie tetrahedralnej poliwypukłej obwiedni oraz wynik typu Caratheodoriego dla takiej obwiedni. Ten bardzo ciekawy rozdział rozprawy kończy wynik o nielokalności własności tetrahedralnej poliwypukłości. Doktorant wskazuje przykład funkcji, która nie jest tetrahedralnie poliwypukła ale jej obcięcia do dowolnej kuli o promieniu jeden posiadają tetrahedralnie poliwypukłe rozszerzenia.

Rozdział trzeci rozprawy analizuje reprezentacje słabych granic nieliniowości, w których funkcje stanu nie muszą być ciągłe. Podstawą przedstawionych badań jest wynik z pracy A. Kłamajskiej z 2006 roku. W pracy tej A. Kłamajska rozbija dziedzinę funkcji stanu na skończoną ilość zbiorów rozłącznych i rozważa funkcje stanu ciągłe na każdej cegiełce z rozbicia oddzielnie. W głównym wyniku A. Kałamajska wykorzystuje uzwarcenia cegiełek i dopuszcza tylko takie funkcje stanu, które posiadają ciągłe rozszerzenia na uzwarceniach cegiełek. Ten ładny wynik teoretyczny natychmiast narzuca pytanie o istnienie takich metrycznych uzwarceń cegiełek aby rozsądne klasy funkcji stanu posiadały ciągłe rozszerzenia. Tym problemem zajął się doktorant w tej części rozprawy i zaproponował konkretne uzwarcenia cegiełek. Ponadto doktorant istotnie rozszerzył klasę funkcji stanów, dla których możliwe jest przeprowadzenie przedstawionych badań. Doktorant dopuszcza funkcje stanu zależne od x i u tzn. dopuszcza funkcje zależne od punktów przestrzeni, na której są zdefiniowane rozważane ciągi.

Rozdział czwarty rozprawy zajmuje się problemem optymalnego projektu w przestrzeniach Sobolewa-Orlicza. Doktorant zakłada, że cienki obszar $\Omega = \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ jest wypełniony przez dwa materiały, których energie są kontrolowane z góry i z dołu przez tą samą funkcję Orlicza spełniającą warunki Δ_2 i ∇_2. Ponadto zakłada się, że procentowy udział obu materiałów w zbiorze Ω jest stały. Rozważa się problem minimizacji funkcjonału energii, gdzie zmianom podlegają nie tylko deformacje ale także rozbicie zbioru Ω na dwa materiały. Stąd nazwa problemu - optymalny projekt. W tym rozdziale rozprawy doktorant analizuje Γ-granicę rozważanych funkcjonałów i otrzymuje funkcjonał graniczny, który jest już zdefiniowany na przestrzeniach funkcyjnych związanych tylko z podstawą ω dziedziny Ω. Tego typu rozważania są ważne z punktu widzenia zastosowań numerycznych. Występują tu podobne trudności co w klasycznej homogenizacji. W dowodzie głównego wyniku (opisie Γ-granicy) doktorant korzysta z niebanalnego narzędzia wykorzystywanego w rachunku wariacyjnym. Doktorant zastępuje ciąg, dla którego całki złożeń z funkcją Orlicza są wspólnie ograniczone nowym ciągiem zgadzającym się z wyjściowym na dużym zbiorze i dla którego rozważane złożenia już są jednakowo całkowalne. Po lekturze tego rozdziału narzucają się natychmiast dwa pytania: konieczność założenia o refleksywności rozważanej przestrzeni Orlicza oraz o możliwość zastosowania nieizotropowych funkcji Orlicza w przedstawionych badaniach.

Cała rozprawa jest napisana w sposób czytelny chociaż doktorant nie uniknął kilku istotnych literówek. Na przykład na stronie 95 funkcjonał J_0 powinien być zdefiniowany na przestrzeniach funkcyjnych związanych ze zbiorem ω a nie Ω. Doktorant starannie dodał do tekstu rozprawy niezbędne pojęcia i narzędzia, z których później korzysta, co ułatwia studiowanie całej rozprawy. Można by było jednak zrezygnować z prezentacji w rozprawie pewnych standardowych dowodów jak na przykład faktu, że w klasie przestrzeni topologicznych zwartych przestrzeń T_2, czyli Hausdorffa, jest typu T_4, a więc przy okazji jest też typu $T_{3\frac{1}{2}}$, czyli Tichonowa. Tych kilka krytycznych uwag nie zmienia jednak mojego pozytywnego zdania o całej rozprawie.

Podsumowując całą recenzję uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska

Compensated compactness and DiPerna-Majda measures autorstwa pana magistra *Piotra Kozarzewskiego*

spełnia wszystkie ustawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z matematyki i wnioskuję o dopuszczenie pana magistra *Piotra Kozarzewskiego* do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński

KChełmiński