dr hab. Tomasz Adamowicz
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
email: T.Adamowicz@impan.pl

Warszawa, 11 września 2020r.

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGRA PIOTRA ANTONIEGO KOZARZEWSKIEGO
"Compensated compactness and DiPerna–Majda measures"

Rozprawa doktorska Pana Kozarzewskiego została napisana pod opieką profesor Agnieszki Kałamajskiej (MIM UW) oraz (kopromotor) profesor Elviry Zappale (Uniwersytet w Salerno). Tematem rozprawy są wybrane zagadnienia z rachunku wariacyjnego, takie jak kwaziwypukłość i miary Younga a kanwą, wymienione w tytule rozprawy, miary DiPerny–Majdy oraz skompensowana zwartość. Ważną rolę w dyskusji odgrywa również teoria przestrzeni funkcyjnych Orlicza, Orlicza-Sobolewa oraz *BV*.

Materiał rozprawy został częściowo oparty na opublikowanych artykułach:

(1) A. Kałamajska, P. A. Kozarzewski, *On the condition of tetrahedral polyconvexity, arising from calculus of variations*, ESAIM: COCV, 23 (2017), 475–495.

(2) P. A. Kozarzewski, E. Zappale, *Orlicz equi-integrability for scaled gradients*, Journal of Elliptic and Parabolic Equations, 3 (2017), 1–10.

(3) P. A. Kozarzewski, E. Zappale, *A note on optimal design for thin structures in the Orlicz–Sobolev setting*, Integral Methods in Science and Engineering, Volume 1: Theoretical Techniques, C. Constanda, M. Dalla Riva, P. D. Lamberti, and P. Musolino, eds., Springer International Publishing, Cham, 2017, 161–171.

(4) P. A. Kozarzewski, *On existence of the support of a Borel measure*, Demonstratio Mathematica, 76 (2018), 76–84.

Prace ukazały się w dobrych i bardzo dobrych czasopismach (np.: publikacja [1]). Ponadto kolejny manuskrypt pana Kozarzewskiego posłany do czasopisma oczekuje na recenzje. Liczba opublikowanych artykułów, ich poziom oraz czasopisma, w których się ukazały świadczą o dobrym warsztatowym przygotowaniu pana Kozarzewskiego do pracy naukowej.

Opis pracy

Rozprawa jest napisana w języku angielskim i ma 130 stron. Bibliografia rozprawy liczy 154 pozycje. Praca podzielona jest na cztery rozdziały, każdy składający się z podrozdziałów dobrze odzwierciedlających podział materiału i strukturalizujących dyskusję wyników.

Rozdział pierwszy zawiera wprowadzenie do rozprawy i ekstrakt z wyników doktoratu. Przedmiotem badań opisanych **w rozdziale drugim** jest pojęcie tetrahedralnej poliwypukłości oraz związane z nią zagadnienie warunków na słabą-$\star$ dolną półciągłość funkcjonałów energii funkcji o wartościach wektorowych. Podobne zagadnienia były badane przez wielu znakomitych matematyków, np.: Ball'a, Dacorogna, Fonseca, Kristensena, Müller'a, Šveraka a w Polsce m.in. przez Agnieszkę Kałamajską. Poszukiwanie warunków implikujących bądź równoważnych poliwypukłości, kwaziwypukłości, wypukłości rzędu 1 należy do najtrudniejszych zagadnień rachunku wariacyjnego, zaś wciąż nierozstrzygnięta w wymiarach 2×2 hipoteza

Morrey'a pozostaje jednym z „świętych Graali" tej teorii. Zatem uzyskanie nietrywialnych wyników w tym obszarze zasługuje na uwagę i docenienie. W rozdziałach 2.2.1-2.2.2 Pan Kozarzewski dyskutuje pojęcie $(2,3)$-kwaziwypukłości, a następnie wykorzystując sympleksy w $\mathbb{R}^3$, w definicji 2.2.7 wprowadza różne geometryczne warianty wypukłości. W dalszej kolejności bada związki między tymi pojęciami a $(2,3)$-kwaziwypukłością (uwaga 2.2.8, obserwacja 2.2.11, lemat 2.2.12). Rozdział 2.3 przynosi niegatywną odpowiedź na pytanie, czy $(2,3)$-kwaziwypukłość implikuje tetrahedralną poliwypukłość (twierdzenie 2.3.3). W tym celu wykorzystano funkcję Alibertiego–Dacorognii (wzór 2.10 na str. 29) i jej charakteryzację w twierdzeniu 2.3.1. Wyniki rozdziału 2.3 nawiązują tym samym do ważnej pracy Alibertiego–Dacorognii [7]. Ponadto, twierdzenie 2.3.3 w połączeniu z wynikami rozdziału 2.2 podaje pełną dyskusję $(2,3)$-kwaziwypukłości oraz wypukłości zdefiniowanych w definicji 2.2.7. Badania nad tetrahedralną poliwypukłością są kontynuowane w rozdziale 2.4, w którym pokazano wariant twierdzenia Carathéodory'ego (twierdzenie 2.4.4) i jest to najbardziej złożony dowód przedstawiony w rozdziale drugim. Konstrukcja funkcji g^f i odpowiedniej tetrahedralnej obwiedni jest klarowna, a dowód twierdzenia 2.4.4 zredagowany w sposób przystępny dla czytelnika. Nie-lokalność pojęcia tetrahedralnej poliwypukłości wykazano w twierdzeniu 2.5.2, wykorzystując ładny lemat 2.5.1. Obserwacja ta opisuje sposób, w jaki lokalnie można generować funkcje tetrahedralnie poliwypukłe z funkcji ciągłych.

Wyniki rozdziału drugiego uważam za rzetelne rozszerzenie wiedzy na temat tetrahedralnej poliwypukłości. Rozdział jest zredagowany z myślą o czytelniku. Mała uwaga techniczna dotyczy odwołania do tw. Kirszbrauna (str. 21), które może być zastąpione ogólniejszym twierdzenie McShane'a dla przestrzeni metrycznych (patrz np.: tw. 6.2 w książce Heinonen'a).

W **rozdziale trzecim** Autor kontynuuje badania w obszarze rachunku wariacyjnego i skupia się na zagadanieniu skonstruowania odpowiedniego metryzowalnego uzwarcenia danego zbioru w przestrzeni Euklidesowej oraz włożenia, tak aby funkcja ciągła zadana na zbiorze posiadała ciągłe rozszerzenie na skonstruowanym uzwarceniu. Motywacja dla takich badań wynika z analizy założeń w teorii miar DiPerny–Majdy, w szczególności celem jest uproszczenie założeń w twierdzeniu o reprezentacji dla miar Young'a. Odpowiednia konstrukcja uzwarcenia przedstawiona jest w lemacie 3.3.1 oraz twierdzeniu 3.3.2. Jednym z głównych wyników rozdziału jest twierdzenie 3.4.3, które uogólnia wynik z pracy profesor Kałamajskiej [86]. Istotnie, wynik pana Kozarzewskiego pozwala rozpatrywać funkcjonały energii zależne nie tylko od wartości funkcji, ale również od punktu w obszarze (patrz założenie (H5') na str. 56). Twierdzenie 3.4.3 zilustrowane jest licznymi przykładami w rozdziale 3.4.2. Uzupełnieniem rozdziału trzeciego jest dyskusja w rozdziale 3.6 dotycząca przykładu Dieudonne'a miary borelowskiej bez nośnika. Konstrukcja odwołuje się do pojęć z podstaw matematyki takich jak liczby porządkowe oraz indukcja pozaskończona. Dyskusja i uwagi w rozdziale trzecim dowodzą erudycji matematycznej i szerokich zainteresowań naukowych Autora.

Rozdział czwarty poświecony jest rozszerzeniu wyników Braides–Fonseca (twierdzenie 1.1 i wniosek 1.2 w [23]) w kategorii przestrzeni Orlicza–Sobolewa. Główne wyniki rozdziału to twierdzenia 4.1.1 oraz 4.1.2 (strony 80-81), których dowody zaprezentowano w rozdziale 4.3. Dowód części (i)-(iii) twierdzenia 4.1.1 opiera się na dowodzie twierdzenia 3.1 w [26], ale dzięki dobremu zrozumieniu metody z [26] możliwe było uproszczenie prezentacji dowodu. Kolejne wyniki pracy przedstawione są w rozdziale 4.4, w którym pokazano Γ-zbieżnośc funkcjonałów energii (4.27) (na str. 95 rozprawy) do funkcjonału (4.28) przy założeniach wzrostu typu Orlicza (4.24). Dowód twierdzenia 4.4.2 wykorzystuje m.in. narzędzia wprowadzone w rozdziale drugim takie jak kwaziwypukłość, ponadto pewne metody z teorii przestrzeni BV oraz twierdzenie Buttazzo–Dal Maso (twierdzenie 4.5.2). Cennym uzupełnieniem dyskusji jest prezentacja w rodziale 4.6 najważniejszych własności przestrzeni Orlicza, Γ-zbieżności oraz przestrzeni

BV. Warto podkreślić, że Autor zadał sobie trud, aby dowody w dużym stopniu klasycznych i dobrze opisanych w literaturze wyników przeprowadzić samodzielnie, upraszczając czasami prezentację dowodów w porównaniu do oryginalnych źródeł (dotyczy to np. wyników z książki Krasnosielskij–Rutickij [106] oraz twierdzenia 4.6.8 - patrz akapit bezpośrednio poprzedzający sformułowanie tego twierdzenia). Pośrednio wskazuje to na dobre opanowanie przez Pana Kozarzewskiego różnorodnych metod z teorii przestrzeni funkcyjnych i rachunku wariacyjnego oraz jest dobrym prognostykiem dalszego rozwoju naukowego.

Motywacją dla badań tego rozdziału, wyrażoną w jego tytule, są tzw. cienkie struktury (ang. *thin structures*). Pewien niedosyt wywołuje brak informacji w jaki sposób rozpartywanie problemu w przestrzeniach Orlicza–Sobolewa może rozwijać istniejące modele cienkich struktur bądź prowadzić do nowych modeli.

Uwagi redakcyjne i językowe

Praca jest ogólnie dobrze zredagowana. Tekst zawiera pewną liczbę błędów typograficznych, nieprawidłowych rodzajników, itp., są to jednak w sumie drobne błędy nie mające większego wpływu na lekturę i zrozumienie rozprawy. Atutem dysertacji są wprowadzenia do kolejnych zagadnień rozprawy i dyskusja elementarnych własności używanych narzędzi matematycznych zamiast odsyłania czytelnika do literatury.

Podsumowanie

Całość rozprawy oceniam pozytywnie. Zagadnienia rozprawy wyrastają z trudnej dziedziny rachunku wariacyjnego jaką jest teoria kwaziwypukłości i miar Younga. Wyniki wymagają dobrego zrozumienia postawionych problemów badawczych oraz stosownych umiejętności matematycznych. Zwraca również uwagę szerokość zainteresowań naukowych Autora oraz jego dokładność rozumowań i zrozumienie roli szczegółu.

Uważam, że rozprawa Pana mgra Piotra Kozarzewskiego spełnia wszystkie ustawowe, a także zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Dlatego wnoszę o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie Autora do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Tomasz Adamowicz

Tomasz Adamowicz