UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział
Fizyki
Astronomii
i Informatyki
Stosowanej

Recenzja rozprawy doktorskiej pana magistra Pawła Ciosmaka

„***On quantum curves, Airy structures and supersymmetry***"

Konforemna teoria pola jest jednym z działów fizyki matematycznej bogatym zarówno pod względem matematycznym jak i fizycznych zastosowań w fizyce teoretycznej począwszy od teorii strun po mechanikę statystyczną i fizykę materii skondensowanej. Podstawową ideą teorii konforemnej jest oparcie jej o symetrie transformacji konforemnych (to znaczy zachowujących kąty) co ma fundamentalne znaczenie w przypadku teorii dwuwymiarowych, gdzie dowolne odwzorowanie holomorficzne zbioru na płaszczyźnie zespolonej ma tę własność. Oznaczy to, iż grupa transformacji konforemnych jest nieskończenie wymiarowa, a co za tym idzie, teoria posiadająca te symetrie jest praktycznie w pełni przez nie opisana. W szczególności teoria obiektów dwuwymiarowych (strun zakreślających dwuwymiarowe powierzchnie podczas ewolucji w czasoprzestrzeni) prowadzi do rozważania kwantowej wersji opartej na symetriach konforemnych i ich projektywnych reprezentacjach.

Rozprawa doktorska p. mgra Pawła Ciosmaka poświęcona jest krzywym kwantowym, supersymetrycznej wersji odpowiedniości między wektorami osobliwymi i krzywymi kwantowymi oraz uogólnieniu supersymetrycznym struktur Airego.

Pierwszy rozdział rozprawy zawiera przegląd różnych matematycznych tematów, które poruszane są dalej, z omówieniem historycznym jak również wprowadza wiele pojęć matematycznych. Z jednej strony dobrze, iż autor zwięźle przedstawił zarys całej tematyki poruszanej w pracy, z drugiej strony nie sposób się oprzeć wrażeniu chaotyczności: np. w "Mathematics of CFT" mamy krótki historyczny przegląd bez wprowadzania pojęć, podczas gdy następny podrozdział „Quantum Curves" operuje operatorami Virasoro, które pojawiają się znikąd. Podobnie jest dalej, np. w 1.2 mamy postać operatorów wierzchołkowych (VO) odwołującą się do algebry Heisenberga (która nie została wcześniej formalnie wprowadzona i pojawia się znacznie później).

Rozdział 2 rozprawy poświęcony jest teorii macierzy przypadkowych, krzywych kwantowych i rekurencji topologicznej. Wprowadzenie do teorii zagadnień macierzy przypadkowych, tożsamości Warda oraz definicja krzywej spektralnej (zarówno w powiązaniu z macierzami przypadkowymi jak i w sposób abstrakcyjny) i topologicznej rekurencji oraz jej hipotetycznego związku z krzywymi kwantowymi są przedstawione w sposób odpowiedni. Rozdział 3 w wyczerpujący sposób przedstawia wprowadzenie do narzędzi używanych dalej takich jak reprezentacje algebr typu Virasoro, moduły Vermy, algebry wierzchołkowe i rozwinięcie iloczynu operatorowego.

ul. prof. Stanisława
Łojasiewicza 11
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664-48-90
fax +48(12) 664-49-05
e-mail:
wydzial.fais@uj.edu.pl

UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział
Fizyki
Astronomii
i Informatyki
Stosowanej

Zasadnicza część pracy, która przedstawia wyniki uzyskane przez p. mgr Ciosmaka dotyczy przede wszystkim konstrukcji krzywych kwantowych z tzw. osobliwych wektorów reprezentacji algebry Virasoro. Oryginalnym wynikiem tej części pracy, który będzie stanowił podstawę przyszłej samodzielnej publikacji autora jest twierdzenie 4.2.1 pokazujące istnienie jednoparametrowej konkretnej rodziny reprezentacji podalgebry algebry Virasoro (nieujemnych część algebry Virasoro). Rozdział zawiera dwa różne dowody twierdzenia wykorzystując bezpośrednie relacje między negatywnymi generatorami algebry Virasoro i tożsamości kombinatoryczne, jak również dowód opierający się bezpośrednio o reprezentację. Rozdział 5 prezentuje wyniki uzyskane przez autora wspólnie z promotorem i innym badaczami dotyczące supersymetrycznej wersji krzywych kwantowych, które zebrane zostały w pracy [14]. Ostatnim rozdziałem jest przestawienie tzw. struktur Airyego (zwykłych i supersymetrycznych) i powiązanie ich z kwantowymi krzywymi spektralnymi.

Części pracy zawierające oryginalne wyniki naukowe, w całości albo w części uzyskane przez autora w trakcie prac nad doktoratem, które oparte są na trzech opublikowanych już artykułach ([14],[15],[50]) z których dwa pierwsze opublikowane są w bardzo dobrym czasopiśmie JHEP. Wyniki osiągnięte bezpośrednio przez autora, w rozdziałach 4-5-6 w zupełności wypełniają wymaganie by uznać, iż jest to oryginalne rozwiązanie problemu naukowego przez autora. Zarówno konstrukcja rodziny reprezentacji negatywnej części algebry Virasoro (w kontekście krzywych kwantowych) jak też pokazanie “no-go theorem” dla operatorów splotu (intertwiners) są ciekawymi wynikami. Wkład pana magistra Ciosmaka we wspomniane wyżej prace i ich wyniki dowodzi, iż uzyskany przez niego zestaw rezultatów naukowych jest znacznie szerszy.

Sama rozprawa napisana jest znacznie bardziej matematycznym językiem aniżeli wspomniane wyżej prace i pokazuje nie tylko wysoką wiedzę teoretyczną i matematyczną autora ale także wysokie zrozumienie poruszanych zagadnień.

Redakcja rozprawy i jej organizacja nie jest jednak wolna od wielu usterek. Wprawdzie wybrany schemat i kolejność przedstawiania zagadnień są jak najbardziej poprawne, jednak rozłożenie materiału nie zawsze jest spójne i logiczne, w szczególności w niektórych miejscach brakuje objaśnienia pojęć i definicji, a niektóre wzory pojawiają się zupełnie niespodziewanie. Przede wszystkim widać to (co już wspomniałem) we wprowadzeniu, jednak dalsze rozdziały również nie uchroniły się od tej maniery. Już na początku rozdziału drugiego mamy oznaczenie $\mathbb{E}$, które nie jest nigdzie wyjaśnione, przy wielu całkach brakuje zakresu całkowania. We wzorach 2.6 i 2.7 brak konsystencji znaków (w eksponencie sumy kwadratów wartości własnych), podobnie cykl Γ nie jest też nigdzie jawnie zdefiniowany. Wiele wzorów zyskałoby również na jawnym wypisaniu zależności, na przykład na początku 2.2.1 $V(x)$ jest zdefiniowane jako funkcja czasów t_i, natomiast nie

ul. prof. Stanisława
Łojasiewicza 11
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664-48-90
fax +48(12) 664-49-05
e-mail:
wydzial.fais@uj.edu.pl

jest jasne czy krzywa spektralna w definicji 2.2.4 zależy od tych parametrów czy nie. W rozdziale 4, w propozycji 4.4.1 nie zdefiniowano Q,

Nieco bardziej merytoryczne zastrzeżenia dotyczą sposobu dowodzenia twierdzenia 4.2.1. Twierdzenie mówi, iż określone operatory są reprezentacją negatywnej części algebry Virasoro. W oczywisty sposób wynika to z 4.1, jednak ani w tej definicji nie widać jednoparametrowej deformacji algebry negatywnej części Virasoro. Definicja funkcji falowej ma parametry α, β i b, we wzorach 4.2 występuje jeszcze N i Q, sama jednoparametrowa rodzina parametryzowana jest przez γ. Brakuje jakiegokolwiek powiązania wystepujących parametrów tak by czytelnik miał jasność co do prowadzonego rozumowania. Nie jest jasne czy jest to po prostu zmiana prezentacji operatorów (poprzez transformacje czy inną parametryzację przestrzeni reprezentacji i funkcji falowej) czy też rzeczywiście inna (nierównoważna) reprezentacja. W pierwszym przypadku powinno to zostać jawnie przedstawione, podczas gdy w drugim nie wystarczy sama konstrukcja operatorów $\hat{L}_{-1}, \hat{L}_{-2}$. Wprawdzie rzeczywiście dalsze operatory da się skonstruować poprzez odpowiednie komutatory, jednak zachodzą nietrywialne relacje, na przykład $\hat{L}_{-5}$ jest wyrażalny przez komutatory $[\hat{L}_{-1}, [\hat{L}_{-1}, [\hat{L}_{-1}, \hat{L}_{-2}]]]$ jak również przez $[\hat{L}_{-2}, [\hat{L}_{-2}, \hat{L}_{-1}]]$, które nie zostały w żaden sposób skomentowane. Dodatkowo, w podrozdziale 4.3 dodatkowy dowód oparty jest bardziej bezpośrednio o pewną ciekawą tożsamość kombinatoryczną. Wydaje się jednak, iż to tożsamość jest dowodzona za pomocą własności operatorów $\hat{L}_n$ reprezentacji aniżeli na odwrót (pomimo początkowego wrażenia, iż taki jest cel tej części). Ciekawe byłoby powiązanie tożsamości z 4.3.1 ze znanymi tożsamościami kombinatorycznymi i jakikolwiek komentarz (na przykład we wzorze w ewidentny sposób prawa strona znika dla $a = b$, co nie jest oczywiste dla lewej strony).

Praca niestety posiada również sporo błędów typu “literówki”, jak na przykład na stronie 35: “spit”, stronie 37: “aae”, stronie 60: “forto” (a jest ich więcej). Oznaczenia matematycznie nie zawsze są konsystentne i niejednokrotnie wprowadzane ad hoc, na przykład w równaniach 2.23 i 2.24 pojawia się zmienna p, która nie występuje wcześniej. Sformułowanie na początku strony 65 jest totalnie niejasne i trudno zgadnąć o co autorowi chodzi w tym miejscu.

Odrębną kwestią jest bibliografia, która ułożona jest zasadniczo według kolejności alfabetycznej, jednak z wieloma wyjątkami (na przykład [49] i [50] pojawiają się niespodziewanie pomiędzy O i P. Dodatkowo, podane odnośniki do prac są niepełne, w szczególności do prac autora rozprawy. Na przykład, poprawne cytowanie pracy [15] to J. High Energ. Phys. 2016, 44 (2016). W wielu cytowanych pracach brakuje dokładnego odnośnika bibliograficznego (numer tomu, serii, strony).

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Wydział Fizyki Astronomii i Informatyki Stosowanej

ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 11
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664-48-90
fax +48(12) 664-49-05
e-mail:
wydzial.fais@uj.edu.pl

UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział
Fizyki
Astronomii
i Informatyki
Stosowanej

Podsumowując, mimo iż, jak wcześniej zauważyłem, praca pokazuje bardzo duże rozeznanie autora w tematyce i opanowanie trudnego działu fizyki matematycznej (a tak naprawdę matematyki), to brakuje w niej odpowiedniej przejrzystości i systematyczności. Jednak część naukowa, przedstawiająca zarówno nowe jak i znane wyniki jest opracowana rzetelnie i zawiera znaczące rezultaty naukowe z dziedziny fizyki matematyczne.

Przedstawione uwagi krytyczne nie umniejszają w żaden istotny wyników autora, które są znakomitą podstawą rozprawy, wskazują jedynie iż prezentacja tych wyników nie jest jego najmocniejszą stroną.

Konkluzją niniejszej recenzji jest, iż przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wszystkie wymagania określone w artykule 13.1 Ustawy z dn. 14 marca 2003 roku “O stopniach naukowych i tytule naukowym”.

prof. dr hab. Andrzej Sitarz
Instytut Fizyki Teoretycznej UJ

ul. prof. Stanisława
Łojasiewicza 11
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664-48-90
fax +48(12) 664-49-05
e-mail:
wydzial.fais@uj.edu.pl