INSTYTUT MATEMATYCZNY
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
tel.: 48-22-522-81-00, fax: 48-22-629-39-97, e-mail: im@impan.pl, www.impan.pl

Dr hab. Karol Palka, prof. IM PAN
palka@impan.pl

3 maja 2020r.

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGR. PAWŁA CIOSMAKA „ON QUANTUM CURVES, AIRY STRUCTURES AND SUPERSYMMETRY"

Praca doktorska Pana Ciosmaka leży na pograniczu fizyki wysokich energii i teorii reprezentacji nieskończenie wymiarowych algebr i super-algebr Liego. Badania mają czysto teoretyczny charakter i dotyczą abstrakcyjnych własności modeli teoretycznych dla cząstek elementarnych w obszarach wysokich energii opartych o obiekty jednowymiarowe (teoria strun) przy uwzględnieniu efektów kwantowych. W pracy bada się reprezentacje nieskończenie-wymiarowych algebr Liego - algebr Virasoro i Heisenberga - oraz ich supersymetrycznych rozszerzeń, moduły Vermy i ich wektory osobliwe, strukturę operatorowych algebr wierzchołkowych oraz tzw. krzywe kwantowe. Podstawowe pojęcia można znaleźć w [IK11]. Praca składa się z sześciu rozdziałów.

Rozdziały 1-3: wstęp, macierze losowe, operatory wierzchołkowe i symetria konforemna.

Rozdziały te zajmują około połowy objętości pracy (60 stron). Wynikami pochodzącymi od autora są rachunkowe lematy 3.2.2 oraz 3.2.3, które upraszczają obliczanie wyrażeń typu $I(L_{-n}v, x)$, gdzie I jest operatorem przeplatania dla modułów Focka nad modułem $\mathcal{F}(0)$, który ma strukturę operatorowej algebry wierzchołkowej (Definicja 3.2.12). W tej części pracy omawiane są przeróżne pojęcia i ich związki, w tym te przywołane powyżej. Widać, że autor ma sporą wiedzę z fizyki teoretycznej związanej z teorią strun i że robi wysiłek, żeby opierać się na pojęciach i metodach matematycznych (często opiera się na monografii [IK11]). Moim zdaniem próbuje jednak przekazać za dużo, co powoduje, że ta część doktoratu jest nieproporcjonalnie długa i w wielu miejscach niejasna. Część sekcji nie jest później wykorzystywana. Szczególnie złym pomysłem jest streszczanie w kilku akapitach trudnych teorii, a jego wykonanie nie daje wrażenia, że autor odpowiednie teorie rozumie. Ekstremalnym przykładem są wyjaśnienia w pojedynczych akapitach teorii przecięć na przestrzeni moduli krzywych (sekcja 2.3.2), hipotezy udowodnionej przez Borcherdsa (część sekcji 3.2.7) czy "przykłady" rekurencji topologicznej (str. 32). Dużo lepiej byłoby formułować lub cytować konkretne twierdzenia, gdy są potrzebne. Ogólnie w tej części dużo jest fizycznych określeń i żargonu, wiele kwestii jest wyjaśnianych niedokładnie lub wcale (szczególnie męczące jest to we wprowadzającym rozdziale 1). Są też błędy i niejasności, dla przykładu:

(1) W sekcji 2.2.1 dziedzina E powinna być zawarta w zbiorze macierzy Hermitowskich, inaczej całka (2.5) nie musi być zbieżna.
(2) W sekcji 2.2.2 przejście do całkowania po orbitach nie jest dobrze wyjaśnione.
(3) W sekcji 2.2.3 dotyczącej skręconych cykli i "funkcji wielowartościowych" ψ określonych na zbiorze otwartym U należy zakładać co najmniej, że $D = \mathbb{C}^n \setminus U$ jest zadane jako układ zer wielomianów, a ψ jest iloczynem ich potęg zespolonych, wówczas $\omega := \frac{d\psi}{\psi} = d(\log\psi)$ jest prawdziwą 1-formą, co jest istotne przy definicji całkowalnej koneksji $\nabla_\omega = d + \omega\wedge$ i homologii $H_p(U, \mathcal{L}_\omega^\vee)$, dla których określone całkowanie jest dualnością z $H^p(\mathcal{A}^\bullet(U), \nabla_\omega) \cong H^p(\Omega^\bullet(*D), \nabla_\omega)$ [AK11, Lemma 2.9, Theorem 2.5]. Dalej, w ogólności wynik całkowania w Definicji 2.2.2 zależy of klasy $[\Gamma] \in H_n(U, \mathcal{L}_\omega^\vee)$ (por. [IK11, Lemma 8.10]). Jeśli cykl Γ ma

być rzeczywiście specjalnie wybrany, to trzeba powiedzieć jak (por. np. [IK11, Theorem 8.4]). W specjalnych przypadkach, np. gdy D jest układem hiperpłaszczyzn w położeniu ogólnym (co jest prawdopodobnie wystarczające dla autora), jest wyróżniona baza $H_n(U, \mathcal{L}_\omega^\vee)$ [AK11, Theorem 3.1].

(4) W definicji 2.2.4 nie rozumem dlaczego granica istnieje. Jeśli np. $V(x) = \frac{1}{2}x^2$, to $P(x) = \frac{1}{N}\lim_{n\longrightarrow\infty}\langle n\rangle$. W tego typu miejscach dobrze jest przywoływać zwięźle założenia (tu: co to jest "matrix model" i co się zakłada o potencjale $V(x)$).

(5) W sekcji 2.2.5: nie każda macierz jest diagonalizowalna, więc wypada skomentować dlaczego nie wpływa to na rozumowania.

(6) W definicji 2.4.1: żeby funkcje x, y dawały zanurzenie krzywej w $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ z algebraicznym obrazem nie wystarczy, że są meromorficzne. Nie wystarczy nawet, że są wymierne.

(7) Opisana kwantyzacja algebry $\mathbb{C}[x, y]$ jest zależna od wyboru współrzędnych x, y, a więc operator $\widehat{P}(\widehat{x}, \widehat{y})$ jest wyznaczany przez wielomian $P(x, y)$, ale nie przez samą krzywą (płaską!) $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0\}$. Nie jest powiedziane, jak zmieni się operator przy algebraicznej zmianie współrzędnych na $\mathbb{C}^2$.

(8) Fakt, że (3.2) są liniowo niezależne jest dla ogólnej algebry Liego treścią twierdzenia Poincarégo-Birkhoffa-Witta, które warto przywołać.

Rozdział 4: Krzywe kwantowe.

Głównym wynikiem rozdziału 4 jest Twierdzenie 4.2.1, czyli konstrukcja i opis nowej reprezentacji ρ algebry Virasoro $\mathcal{V}$ na podprzestrzeni $\mathbb{C}[[t_0, t_1, \ldots]] \otimes \mathbb{C}[h, h^{-1}] \otimes \mathbb{C}\{x\}$ rozpinanej przez pewne konkretne funkcje $\widehat{\psi}_\alpha(v, x)$, $v \in \mathcal{F}(\alpha)$ zdefiniowane przy użyciu specjalnych homomorfizmów Σ między modułami Focka (pewnymi modułami Vermy nad algebrą Heisenberga) i operatorów przemieniania pomiędzy modułami nad algebrami wierzchołkowymi. Zwrócę tutaj uwagę na brak precyzyjnych wyjaśnień następującej kwestii: Twierdzenie 4.2.1, Stwierdzenie 4.3.2 oraz rachunki w sekcji 4.3 dotyczą tylko reprezentacji $\mathcal{V}^-$, natomiast we wstępie do rozdziału 4 oraz w Sekcji 4.3 mówi się o reprezentacji pełnej algebry Virasoro. Pojęcia są tutaj skomplikowane i sprawne operowanie nimi wymaga treningu, ale sama konstrukcja reprezentacji jest jasna o tyle, że jest ona indukowana z wiadomej reprezentacji $\mathcal{V}$ na $\mathcal{F}(\alpha)$ poprzez warunek $\rho(L_n)\widehat{\psi}_\alpha(v, x) := \widehat{\psi}_\alpha(L_n v, x)$. Treścią twierdzenia jest podanie konkretnej postaci działania generatorów L_n algebry Virasoro dla $n \leqslant -1$, niezależnej of v, w formie kombinacji operatorów mnożenia i różniczkowania. Dowód to rachunek zajmujący stronę i używający Lematu 3.2.3 pochodzącego od autora.

Ta reprezentacja jest wykorzystywana do podania przykładów specjalnych operatorów różniczkowych, tzw. krzywych kwantowych (Example 4.2.1). W skrócie, jeśli moduł Vermy nad algebrą Virasoro $\mathcal{V}$ posiada wektor osobliwy (wówczas moduł ten jest redukowalny), to można go przedstawić jako wynik działania pewnego wielomianu $A(\{L_{-n}\}_{n>0}) \in U(\mathcal{V}^-)$, gdzie $U(\mathcal{V}^-)$ jest algebrą obwiednią $\mathcal{V}^-$, na wektor najwyżej wagi. Taki operator A to właśnie krzywa kwantowa, która pojawia się w pewnych fizycznych hipotezach (por. Sekcja 2.5.1 pracy).

Podobna konstrukcja i opis reprezentacji jak w Twierdzeniu 4.2.1, oznaczmy ją ρ^{CFT}, bez parametru $v \in \mathcal{F}(\alpha)$, tzn. na funkcjach $\widehat{\psi}(|\alpha\rangle)$ gdzie $|\alpha\rangle$ jest wektorem najwyższej wagi w $\mathcal{F}(\alpha)$, była podana w [MS17, (1.10)], a konstrukcja autora jest jej jednoparametrową deformacją, dokładniej (dla $n > 0$):

$$\rho(L_{-n}) = \rho^{CFT}(L_{-n}) + \gamma \sum_{m=n-2}^{\infty} \binom{m}{n-2}(m+2)t_{m+2}x^{m-n+2}, \tag{0.1}$$

gdzie $\gamma = h(\alpha - N\sqrt{\beta})$. Z matematycznego punktu widzenia ciekawe są uwagi w Sekcji 4.3. Mianowicie z faktu, że ρ jest reprezentacją, wynika kombinatoryczna tożsamość (Stwierdzenie 4.3.1)

$$\sum_{n=b}^{k-2-a} \binom{k-n-2}{a}\binom{n}{b}(2n-k-2) = (b-a)\binom{k}{a+b+2} \quad a, b, k \in \mathbb{N},\ k \geqslant a+b+2. \tag{0.2}$$

I na odwrót, autor argumentuje w sekcji 4.3, że gdyby wiedzieć z góry, że tożsamość (0.2) zachodzi, to opis reprezentacji ρ^{CFT} implikuje opis reprezentacji ρ. Można by oczekiwać, że wobec tego autor

przystąpi do bezpośredniego udowodnienia (0.2), co pozwoli uzyskać prostszy dowód twierdzenia, ale tak się nie dzieje. Jej dowód nie jest trudny, więc pozwalam sobie go podać.

Tożsamość (0.2) wynika przez podstawienie $(s, r, i, c) = (-a-1, -b-1, n-b, -k-a-b-2)$ z tożsamości

$$\sum_{i=0}^{c} \binom{r}{i}\binom{s}{c-i}(s-c-r+2i) = (s-r)\binom{s+r-1}{c} \quad c \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{R}, \tag{0.3}$$

a ta z kolei wynika z dwukrotnego użycia tożsamości

$$\sum_{i=0}^{c} \binom{r}{i}\binom{s}{c-i}(r-i) = r\binom{s+r-1}{c} \quad c \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{R}. \tag{0.4}$$

Ponieważ $\binom{r}{i}(r-i) = r\binom{r-1}{i}$, ta ostatnia jest konsekwencją tożsamości Chu-Vandermonde'a ($r' = r-1$)

$$\sum_{i=0}^{c} \binom{r'}{i}\binom{s}{c-i} = \binom{r'+s'}{c} \quad c \in \mathbb{N},\ r', s \in \mathbb{R}, \tag{0.5}$$

która wynika z porównania współczynników przy x^c dla rozwinięć $(1+x)^{r'}(1+x)^s$ oraz $(1+x)^{r'+s}$.

Rozdziały 5-6: Supersymetria i struktury Airy'ego.

Super-przestrzeń liniowa to suma prosta $V = V_0 \oplus V_1$ z $\mathbb{Z}_2$-gradacją: $|v| = i$ dla $v \in V_i$, $i = 0, 1$. Jeśli taka przestrzeń jest algebrą, to mówimy, że jest super-przemienna jeśli $ab = (-1)^{|a||b|}ba$ dla elementów jednorodnych. Dla przykładu, algebra zewnętrzna $\bigwedge W$ na zwykłej przestrzeni liniowej W z podziałem na formy parzystego i nieparzystego stopnia jest taką właśnie super-przemienną algebrą. Wprowadza się też pojęcia super-całkowania, super-algebry Liego (modyfikując odpowiednio warunek Jacobiego), modułów nad nimi, super-algebr wierzchołkowych, etc. Dobrą lekturą są tutaj [Var04], [Man97], [IK11, §4.1, §C.4]. Autor przywołuje powyższe pojęcia razem z dwoma możliwymi super-rozszerzeniami algebr Virasoro i Heisenberga (rozszerzenia Neveu-Schwarza i Ramonda). Chociaż nie ma to większego wpływu na badania teoretyczne, dodam, że z punktu widzenia fizyki supersymetria jest teorią, która mimo różnych prób eksperymentalnych nie znalazła na razie potwierdzenia.

Sekcja 5.2.2, która jest dygresją na temat całkowania zmiennych w nieparzystej gradacji (fermionowych), jest wkładem własnym autora, ale niestety nie znalazłem w niej konkretnej konkluzji. Innym wkładem własnym autora jest Stwierdzenie 5.3.7, które mówi, że pewne naturalnie wyglądające warunki dotyczące operatorów przeplatania, pojawiające się przy próbie konstrukcji super-krzywych kwantowych, prowadzą do sprzeczności. Jest to ciekawa obserwacja i nie jest jasne jak ominąć ten problem. W przykładzie na stronie 82 pojawiają się powiązane z wektorami osobliwymi operatory, tzw. super-krzywe kwantowe.

Skrótowa sekcja 5.4 "napisana z mniejszą matematyczną precyzją" zawiera formuły opublikowane w [CHJ+18], w tym opis reprezentacji super-rozszerzeń analogiczny do Twierdzenia 4.2.1 (Twierdzenia 5.4.1 i 5.4.2). Ze względu na to, że cytowana praca ma 68 stron, a żadne twierdzenie się w niej nie pojawia, nie sprawdzałem tych formuł dokładnie.

W rozdziale 6 autor wraca do wymienianych w pracy wielokrotnie pojęć *rekurencji topologicznej* oraz *kwantowych struktur Airy'ego*, które należą do bieżących tematów badań fizyki teoretycznej w tym obszarze (i które autor chce uogólniać do wersji super-symetrycznych), ale ich jasnej i pełnej definicji nie podaje. Proponowane uogólnienie, czyli supersymetryczna struktura Airy'ego dla super-przestrzeni liniowej V (Definicja 6.1.2), to specyficzny parzysty homomorfizm super-algebr Liego $\widehat{L}\colon V^* \longrightarrow \mathcal{W}(V)$, gdzie $\mathcal{W}(V)$ jest algebrą Weyla V. Nie wiem dlaczego używa się w tej definicji licznych indeksów, zamiast form dwuliniowych. Podana definicja algebry Weyla (Definicja 6.1.1) jest błędna: dzieli się tam $T(V \oplus V^*)$ przez ideał generowany przez wyrażenia, które nie muszą należeć do $T(V \oplus V^*)$, bo zawierają parametr h.

Ciekawym wynikiem jest Twierdzenie 6.1.1 mówiące, że w specjalnych przypadkach da się jednoznacznie rozwiązać równania $\widehat{L}(x_i^*)e^F = 0$ dla tzw. wolnej energii $F \in \mathcal{W}(V)[[h]]$ (x_i tworzą bazę V). Dowód to prosty rachunek indukcyjny używający rozwinięcia w potęgi parametru h. Rozdział zawiera kilka przykładów i mniejszych lematów dotyczących struktur Airy'ego.

Konkluzja

Jak wynika z przeprowadzonej analizy, Pan Paweł Ciosmak wykazuje się w rozprawie doktorskiej wiedzą teoretyczną i umiejętnością samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Rozprawa ma poprawną strukturę, zawiera rozwiązania oryginalnych mniejszych problemów naukowych i właściwie cytuje literaturę, a więc w mojej ocenie spełnia warunki ustawowe. Język angielski jest ogólnie poprawny, chociaż autor ma problemy z właściwym użyciem (brakiem użycia) angielskich przedimków "the" oraz "a".

Dokładniejsza ocena jakości pracy z punktu widzenia matematyka jest bardziej kłopotliwa. Jest to bowiem praca z fizyki teoretycznej, a główne wyniki były publikowane w czasopismach fizycznych takich jak Journal of High Energy Physics, gdzie formułowanie precyzyjnych definicji i twierdzeń nie jest wymagane. Oczywiście, badane struktury są skomplikowane i interesujące, a ich odpowiednie formalizowanie jest zadaniem ambitnym, któremu są w stanie podołać z sukcesem tylko bardzo dobrzy matematycy. Doceniam, że Pan Ciosmak stara się iść tą drogą, ale w mojej ocenie nie dociera do celu. Nie mniej niż połowę rozprawy doktorskiej stanowią rzeczy znane z książek, a nowych matematycznie interesujących wyników jest niewiele. Redakcja pracy jest, jak sądzę, poprawna z punktu widzenia fizyka. Sam fakt, że formułowane są definicje, twierdzenia i dowody, jest budujący, ale ogólnie poziom ścisłości i kultury matematycznej odbiega od typowych rozpraw doktorskich z matematyki.

Literatura

[AK11] Kazuhiko Aomoto and Michitake Kita, *Theory of hypergeometric functions*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Tokyo, 2011, With an appendix by Toshitake Kohno, Translated from the Japanese by Kenji Iohara. MR 2799182

[Bor92] Richard E. Borcherds, *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras*, Invent. Math. **109** (1992), no. 2, 405–444. MR 1172696

[Bor97] ———, *What is a vertex algebra?*, arXiv:q-alg/9709033v1.

[CHJ+18] PawełCiosmak, Leszek Hadasz, Zbigniew Jaskólski, Masahide Manabe, and Piotr Suł kowski, *From CFT to Ramond super-quantum curves*, J. High Energy Phys. (2018), no. 5, 133, front matter+67. MR 3815054

[IK11] Kenji Iohara and Yoshiyuki Koga, *Representation theory of the Virasoro algebra*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011. MR 2744610

[Man97] Yuri I. Manin, *Gauge field theory and complex geometry*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 289, Springer-Verlag, Berlin, 1997, Translated from the 1984 Russian original by N. Koblitz and J. R. King, With an appendix by Sergei Merkulov. MR 1632008

[MS17] Masahide Manabe and Piotr Sułkowski, *Quantum curves and conformal field theory*, Phys. Rev. D **95** (2017), no. 12, 126003, 52. MR 3829781

[Var04] V. S. Varadarajan, *Supersymmetry for mathematicians: an introduction*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 11, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. MR 2069561