dr hab. Mateusz Kwaśnicki
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Wrocław, 4 lutego 2018

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Michała Strzeleckiego pt. „Concentratration of measure" napisanej pod kierunkiem dr. hab. Radosława Adamczaka na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Przedmiotem omawianej rozprawy doktorskiej są zagadnienia *koncentracji miary*, liczącej niemal pół wieku dziedziny analizy matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa, która (w jednym z kilku równoważnych ujęć) skupia się na badaniu szybkość zaniku miary warstwic $\{x : F(x) > t\}$ funkcji lipschitzowskiej F gdy t dąży do nieskończoności. W rozwój tej gałęzi matematyki zaangażowanych było wielu wybitnych matematyków i choć klasyczne wyniki zostały uzyskane kilka dekad temu, tematyka wciąż jest intensywnie rozwijana.

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska ma formę klasycznej dysertacji i liczy 112+vi stron tekstu. Składa się z dwóch części. Pierwsza, krótsza, dotyczy klasycznego zagadnienia warstwic funkcji lipschitzowskich. W drugiej, dużo obszerniejszej, rozważane są funkcje wypukłe (w tym nielipschitzowskie) — ten kierunek badań zainicjował Talagrand na początku lat 90. Tekst kończy krótki załącznik z informacjami dotyczącymi równań Hamiltona–Jacobiego i liczący 83 pozycje spis literatury. Rozprawie doktorskiej towarzyszą trzy publikacje, zawierające większość wyników drugiej części: dwa artykuły ukazały się w renomowanych czasopismach (*Bernoulli* oraz *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*), jeden w czasopiśmie nieco niższej rangi (*ALEA*). Pierwsza część rozprawy jest częścią niezakończonego jeszcze międzynarodowego projektu, który (jak można zrozumieć z autoreferatu) również zaowocuje publikacją. Mgr Michał Strzelecki jest ponadto autorem trzech opublikowanych artykułów naukowych (w cenionych czasopismach: *Studia Math.*, *Proc. Amer. Math. Soc.* oraz *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*) i jednego artykułu zgłoszonego do redakcji.

W dalszej części recenzji krótko przedstawię główne tezy rozprawy doktorskiej, moją ocenę rangi naukowej oraz sposobu prezentacji uzyskanych wyników, krótką charakterystykę pozostałego dorobku naukowego mgr. Michała Strzeleckiego i konkluzję. Już w tym miejscu chciałbym jednak podkreślić, że omawianą rozprawę doktorską uważam za bardzo dobrą i nie mam najmniejszych wątpliwości, że powinna zostać dopuszczona do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Główne tezy rozprawy

1. Wprowadzenie. Klasyczne wyniki teorii koncentracji miary wiążą różnego rodzaju nierówności. W omawianej rozprawie badane są miary probabilistyczne μ na przestrzeni $\mathbb{R}^d$. Zjawisko koncentracji miary zwykle opisywane jest nierównością postaci

$$\mu\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x) - M_f| > t\} \leqslant \alpha(t), \tag{1}$$

gdzie $\alpha(t)$ jest ustaloną szybko malejącą funkcją, f jest dowolną funkcją spełniającą warunek Lipschitza ze stałą 1, zaś M_f oznacza medianę (czasem — wartość średnią) funkcji f względem miary μ. Zwykle rozważa się odpowiednią rodzinę miar na przestrzeniach różnych wymiarów, a kluczową kwestią jest brak zależności wyrażenia $\alpha(t)$ od wymiaru. Za pierwszy wynik w tej dziedzinie uznaje się twierdzenie Lévy'ego i Schmidta, w którym μ jest miarą jednostajną na sferze jednostkowej; w tym przypadku można przyjąć

$\alpha(t) = e^{-(d-2)t^2}$, a więc uzyskiwane oszacowania są coraz lepsze wraz ze wzrostem wymiaru d. Gdy μ jest standardową miarą gaussowską, koncentracja miary zachodzi z prawą stroną daną wzorem $\alpha(t) = 2e^{-t^2/2}$.

Zjawisko koncentracji miary związane jest z kilkoma mniej lub bardziej klasycznymi nierównościami, m.in. nierównością Poincaré

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant c \int |\nabla f|^2 d\mu, \tag{2}$$

gdzie $\mathrm{Var}_\mu(f) = \int f^2 d\mu - (\int f d\mu)^2$; logarytmiczną nierównością Sobolewa

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant c \int |\nabla f|^2 d\mu, \tag{3}$$

gdzie $\mathrm{Ent}_\mu(f) = \int f \log f d\mu$ dla $f \geqslant 0$ o całce równej 1; nierównością Talagranda $\mathbb{T}_2$

$$\mathscr{T}_2(\mu, f\mu) \leqslant c\,\mathrm{Ent}_\mu(f), \tag{4}$$

gdzie $\mathscr{T}_2(\mu, \nu)$ oznacza odległość Wassersteina między miarami probabilistycznymi μ i ν. W tych nierównościach f jest zwykle dowolną funkcją gładką; często można osłabić to założenie i wymagać, by f była lipschitzowska.

Klasyczny rezultat orzeka, że nierówność (3) pociąga nierówność (4), która z kolei implikuje (2). Ponadto wszystkie są związane z koncentracją miary; na przykład nierówność (4) jest równoważna nierówności (1) dla potęg tensorowych miary μ z prawą stroną rzędu $\alpha(t) = 2e^{-ct^2}$.

2. Wyniki dotyczące funkcji lipschitzowskich. Pierwsza część pracy, rozdział 2, dotyczy swego rodzaju uogólnienia wspomnianego wyżej wyniku. Główne twierdzenie (o numerze 2.2.1) orzeka, że dla $q \in (2, \infty)$ nierówność Latały–Oleszkiewicza

$$\sup_{p \in (1,2)} \frac{1}{(2-p)^{2/q}} \left(\int f^2 d\mu - \left(\int |f|^p d\mu \right)^{2/p} \right) \leqslant c \int |\nabla f|^2 d\mu \tag{5}$$

(blisko związana z nierównością Poincaré) implikuje zmodyfikowaną logarytmiczną nierówność Sobolewa

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant c \int \max\left(\frac{|\nabla f|^2}{|f|^2}, \frac{|\nabla f|^q}{|f|^q} \right) f^2 d\mu. \tag{6}$$

Wynik ten jest następnie stosowany do uzyskania lepszych niż dotąd znane oszacowań koncentracji miary μ oraz jej potęg tensorowych (wnioski 2.2.2, 2.2.3 i 2.2.5).

Nierówności (5) oraz (6) były badane przez innych autorów, w dużym uproszczeniu — w celu charakteryzacji zjawiska koncentracji miary z prawą stroną rzędu $\alpha(t) = 2e^{-ct^r}$, gdzie $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Rezultat pierwszej części rozprawy doktorskiej jest tu znaczącym wynikiem, który wskazuje związek między dwoma różnymi podejściami do tego zagadnienia. Dowód naśladuje argumenty wykorzystane wcześniej w literaturze w nieco innym kontekście, z istotnymi modyfikacjami.

3. Wyniki dotyczące funkcji wypukłych. Przeważająca część rozprawy doktorskiej dotyczy nierówności podobnych do tych omawianych powyżej, ale zawężonych do klasy funkcji wypukłych. Nierówności te omawiane są we wprowadzającym rozdziale 3 oraz kolejnych cztery rozdziałach. Każdy z nich dotyczy pokrewnych, lecz niezależnych zagadnień.

Głównym wynikiem rozdziału 4 jest charakteryzacja miar na prostej ($d = 1$), które spełniają następujący wariant logarytmicznej nierówności Sobolewa:

$$\mathrm{Ent}_\mu(e^f) \leqslant \int H(c\nabla f)e^f d\mu \tag{7}$$

dla wszystkich wypukłych funkcji lipschitzowskich f; tu H jest ustaloną parzystą funkcją wypukłą, która w pewnym otoczeniu zera jest równa $\frac{1}{4}x^2$ i której dolny indeks Matuszewskiej w nieskończoności jest większy od jedności (jednostronny warunek regularnej zmienności). Powyższa nierówność okazuje się równoważna warunkowi na „ważony" moduł ciągłości odwrotnej dystrybuanty miary μ, wyrażony przy pomocy funkcji transportującej symetryczny rozkład wykładniczy (tj. rozkład Laplace'a) na miarę μ oraz transformaty Fenchela–Legendre'a funkcji H. Rezultat ten nie był znany nawet w przypadku kwadratowej funkcji H. Wnioskiem są równoważne sformułowania w języku innych nierówności (twierdzenie 4.1.8) oraz wyniki dotyczące koncentracji miary (wniosek 4.1.9), a także ciekawa charakteryzacja lipschitzowskiej wersji nierówności Talagranda (4) poprzez lipschitzowską nierówność Poincaré (2) oraz *wypukłą* logarytmiczną nierówność Sobolewa. W końcowej części sformułowano ponadto trzy problemy otwarte.

W rozdziale 5 udowodniono (twierdzenie 5.1.1) równoważność nierówności Poincaré (2) dla wszystkich funkcji wypukłych z wariantem nierówności Talagranda, w którym odległość Wassersteina $\mathscr{T}_2$ zastąpiona jest wielkością

$$\overline{\mathscr{T}_\theta}(\mu,\nu) = \max\left\{\inf_{(X,Y)} \mathbb{E}\theta(X - \mathbb{E}(Y|X)), \inf_{(X,Y)} \mathbb{E}\theta(Y - \mathbb{E}(X|Y))\right\};$$

infimum brane jest tu na zbiorze wszystkich wektorów losowych (X, Y) o rozkładach brzegowych μ oraz ν, zaś wypukła funkcja θ jest równa $|x|^2$ w pewnym otoczeniu zera oraz $a|x| - b$ w dopełnieniu tego otoczenia. Wynik ten był dotąd znany jedynie w przypadku jednowymiarowym. Dowód przedstawiony w rozprawie wykorzystuje zmodyfikowane nierówności logarytmiczne Sobolewa dla funkcji wypukłych oraz wklęsłych. Jedna z implikacji jest standardowa, dowód drugiej inspirowany jest wcześniejszymi wynikami dotyczącymi dowolnych funkcji lipschitzowskich (niekoniecznie wypukłych), ponownie — z istotnymi zmianami. Rozdział zamykają przykłady i dwa otwarte pytania.

Konsekwencje wspomnianego wariantu nierówności Talagranda przedstawione są w rozdziale 6. Okazuje się, że nierówność ta (a właściwie jej słabszy wariant) pociąga zjawisko koncentracji miary dla lipschitzowskich funkcji wypukłych (twierdzenia 6.2.1 i 6.2.3). Stąd z kolei wynikają pokrewne własności niekoniecznie lipschitzowskich funkcji wypukłych (twierdzenie 6.3.1).

Ostatni rozdział rozprawy dotyczy wspomnianego w poprzednim akapicie wariantu nierówności Talagranda, a ściślej: dualnego sformułowania tej nierówności przy pomocy *splotu infimum*. W miejsce kwadratowo-liniowej funkcji kosztu θ rozważana jest optymalna funkcja kosztu związana z funkcją tworzącą momenty miary μ. Głowny wynik tej części (twierdzenie 7.2.1) orzeka, że miary niezmiennicze na obroty, których ogony są logarytmicznie wklęsłe, spełniają taką nierówność. Konsekwencją są nierówności między słabymi i mocnymi momentami miary μ (twierdzenie 7.2.4, wniosek 7.2.5). Dowody znów inspirowane są analogicznymi wynikami dla dowolnych funkcji lipschitzowskich.

Rozdział 5 odpowiada publikacji w *Bernoulli*, wspólnej z Radosławem Adamczakiem, promotorem. Wyniki rozdziału 4 są treścią artykułu w *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, którego współautorem jest Yan Shu. Rozdział 7 z kolei oddaje treść publikacji w *ALEA*, wspólnej z Martą Strzelecką oraz Tomaszem Tkoczem.

Ocena rangi naukowej uzyskanych wyników

Z powyższego opisu jasno wynika, że omawiana rozprawa doktorska zawiera wiele nowych rezultatów, istotnie rozszerzających stan wiedzy w aktywnie rozwijanej dziedzinie matematyki. Autor sprawnie operuje rozmaitymi narzędziami, wykorzystuje m.in. równania Hamiltona–Jacobiego dla splotów infimum, transformatę Legendre'a–Fenchela czy własności entropii miarowej. Teoria koncentracji miary wiąże ze sobą liczne nierówności, między którymi zachodzą nieoczywiste związki. Z uznaniem odnoszę się do biegłości autora w posługiwaniu się tymi nierównościami, znajomości literatury i umiejętności dostosowania znanych technik dowodowych do swoich potrzeb.

Jedyny ewentualny mankament ocenianej rozprawy doktorskiej to brak wiodącego rezultatu, którego dowód wymagałby całkiem nowej idei. Wszystkie uzyskane wyniki nawiązują do znanych twierdzeń, a metody dowodowe są inspirowane argumentami wykorzystanymi w literaturze. Trudno jednak uznać to za istotny zarzut, zwłaszcza w kontekście specyfiki dziedziny matematyki, której dotyczy doktorat. Mnogość pojęć, nierówności i związków między nierównościami sprawia, że już opisanie wyników z rozprawy w sposób syntetyczny jest kłopotliwe (w przedstawionej wyżej charakterystyce jest bardzo dużo uproszczeń). Najlepszym zaś dowodem wagi uzyskanych wyników jest fakt opublikowania ich na łamach bardzo dobrych czasopism naukowych.

W całej rozprawie nie znalazłem ani jednego błędu merytorycznego. Zwraca uwagę rzetelność odniesień do literatury: wszystkie twierdzenia oraz dowody opatrzone są odpowiednim komentarzem, informującym o źródle, także wtedy, gdy oryginalne sformułowanie czy rozumowanie stanowiło ledwie inspirację. Dziwi jedynie brak klarownych odniesień do własnych artykułów, które zawierają opisywane rezultaty.

Ocena sposobu prezentacji wyników

Struktura rozprawy doktorskiej jest bardzo czytelna. Jedynym zastrzeżeniem jest mnogość wstępów. Pierwszy rozdział stanowi doskonałe, świetnie napisane wprowadzenie do dziedziny. Zrozumiałe jest opatrzenie osobnym wstępem obu części rozprawy (odpowiednio podrozdział 2.1 i rozdział 3), ale dobrym pomysłem byłoby chyba wyodrębnienie i połączenie wstępów do rozdziałów 4–7 (podrozdziały 4.1, 5.1, 6.1 i 7.1) oraz zamieszczenie ich w rozdziale 3.

Moim zdaniem warto byłoby też zebrać wszystkie omawiane nierówności w jednym miejscu lub przynajmniej załączyć spis ważnych nierówności z odpowiednimi odnośnikami. W obecnej postaci niespecjaliście trudno czytać tekst w sposób liniowy, wymagane są częste powroty do jednej z wielu części wstępnych.

W niektórych dowodach ciągłość rozumowania przerywana jest technicznymi wstawkami, np. dotyczącymi możliwości zawężenia uwagi do funkcji gładkich przez odpowiednią procedurę regularyzacji. Warto byłoby te fragmenty wyodrębnić w postaci lematów czy komentarzy do odpowiednich nierówności oraz zamieścić w części wstępnej. Równie pomocne byłyby analogiczne systematyczne uwagi dotyczące własności tensoryzacji.

Niektóre szczegóły rozumowania zostały pominięte. Jest to całkiem zrozumiałe, a nawet pożądane, bowiem już w obecnej postaci rozprawa liczy ponad sto stron gęstego, pozbawionego zbędnych komentarzy tekstu. Niestety nie zawsze pominięte detale są opatrzone właściwym komentarzem (np. w wyprowadzeniu wzoru (2.4.3) na s. 20).

Inne drobne usterki to: niezręczności językowe (np. *not speaking about* na s. 7, *criterion for satisfying* na s. 25), niezrozumiałe sformułowania (np. *f is constant and equal to zero on its support* na s. 15; rozważanie wektora (x_i) w zakresie od $i = 1$ do p gdy p jest być może liczbą niecałkowitą na s. 84) czy nieistotne pomyłki (np. na s. 48 funkcja θ jest rosnąca wyłącznie na $[0, \infty)$, nie na $\mathbb{R}$; pytanie 5.6.3 jest powyżej, nie poniżej odniesienia na s. 82; brakuje szczegółów bibliograficznych w pozycji [43]; dodano niepotrzebny odstęp w nazwisku Cirel'son w pozycji [76]; podtytuł *Old and New* umieszczono za datą w opisie pozycji [80]). Zwraca uwagę trzykrotne wprowadzenie transformaty Legendre'a–Fenchela, na stronach 25 (bez definicji, pod nazwą transformacja Legendre'a), 38 (z definicją, pod nazwą transformacja Fenchela–Legendre'a) oraz 90 (z definicją, ponownie pod nazwą transformacja Legendre'a). Niektóre fragmenty rozumowania można najwyraźniej minimalnie uprościć (np. w lemacie 2.5.2 można zastąpić $\frac{3}{16}$ stałą $\frac{1}{4}$, z prostszym dowodem; w dowodzie twierdzenia 7.2.1 krok 1 wydaje się zbędny, ponieważ ogólniejsza redukcja dokonywana jest w kroku 2).

Powyższe zastrzeżenia dotyczą jednak detali i mają subiektywny charakter. Ponadto należy uznać, że w stosunku do długości tekstu liczba tego typu drobnych błędów jest niewielka. Sposób prezentacji wyników w rozprawie doktorskiej oceniam więc bardzo dobrze.

Trochę gorzej pod tym względem wypada autoreferat. Zawiera on dobre, pięciostronicowe podsumowanie zawartości rozprawy doktoreskiej, ale nie jest wolny od usterek. Najważniejsza to brak wyjaśnienia, czym są nierówności $\overline{\mathbb{T}}_\theta$ i $\overline{\mathbb{T}}_\theta^-$ na stronie 4 oraz nierówność $\overline{\mathbb{T}}$ na stronie 5. Warto byłoby też zdefiniować pojęcie entropii funkcji względem miary oraz entropii zmiennej losowej. Ponadto zdarzają się literówki (np. *kulę jednostką* na s. 3; nieprzetłumaczone *if* w ostatnim wzorze na s. 3). Opis pozostałego dorobku naukowego autora jest nader lakoniczny. Brakuje mi wreszcie jasnej informacji na temat roli mgr. Michała Strzeleckiego w publikacjach wieloautorskich.

Charakterystyka pozostałego dorobku naukowego doktoranta

Oprócz trzech artykułów zawierających wyniki zasadniczej części rozprawy doktorskiej, mgr Michał Strzelecki jest autorem trzech artykułów opublikowanych i jednego zgłoszonego do redakcji. Dwie z tych prac dotyczą oszacowań operatorów singularnych: transformaty Hilberta oraz transformaty Beurlinga–Ahlforsa; tematyką tą autor zajmował się w ramach swojej pracy magisterskiej. Kolejna zawiera wstępne wyniki, stanowiące punkt wyjścia do jednego z rozdziałów rozprawy doktorskiej. Ostatnia, jeszcze nieopublikowana, dotyczy zastosowań rezultatów innego rozdziału rozprawy doktorskiej do badania m.in. modelu Isinga. Wszystkie te prace zawierają oryginalne wyniki z niebanalnymi dowodami; te już opublikowane ukazały się na łamach bardzo dobrych czasopism.

Konkluzja

Oceniana rozprawa doktorska mgr. Michała Strzeleckiego bez najmniejszych wątpliwości spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Stanowi ona oryginalne rozwiązanie problemu naukowego — a nawet wielu problemów naukowych — postawionych przez uznanych specjalistów. Poziom techniczny zastosowanych argumentów dowodzi zdolności mgr. Michała Strzeleckiego do prowadzenia samodzielnych badań naukowych, zaś różnorodność wykorzystanych metod dowodowych ukazuje rozległą ogólną wiedzę teoretyczną w dziedzinie. Wobec tego wnoszę o dopuszczenie rozprawy doktorskiej mgr. Michała Strzeleckiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Mimo drobnych zastrzeżeń, opisanych wyżej i odnoszących się przede wszystkim do sposobu prezentacji wyników, uznaję rangę uzyskanych wyników za dostatecznie wysoką, by wnioskować o wyróżnienie rozprawy doktorskiej mgr. Michała Strzeleckiego.

Mateusz Kwaśnicki