Karlsruhe, 24.09.2019 r.

dr hab. Jarosław Mederski,
Instytut Matermatyczny Polskiej Akademii Nauk

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgra Michała Miśkiewicza
zatytułowanej
Singularities of minimizing harmonic maps into closed manifolds

Niniejsza recenzja dotyczy rozprawy doktorskiej mgra Michała Miśkiewicza zatytułowanej *Singularities of minimizing harmonic maps into closed manifolds* (tytuł w języku polskim *osobliwości przekształceń harmonicznych w zamknięte rozmaitości*) przygotowanej na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego pod kierunkiem dr hab. Anny Zatorskiej-Goldstein oraz prof. dr. hab. Pawła Strzeleckiego.

Rozprawa została napisana w języku angielskim i składa się z siedmiu przejrzystych rozdziałów. Zawiera również streszczenia w języku angielskim i polskim oraz bibliografię liczącą 51 pozycji. Rozdziały są bardzo techniczne pod względem matematycznym, lecz streszczenia pozwalają na dobre zrozumienie struktury doktoratu i przedstawiają szkic głównych wyników osiągniętych przez Autora.

Rozprawa bazuje na wynikach uzyskanych w następujących czterech pracach:

- [29] *On the size of the singular set of minimizing harmonic maps into the sphere in dimension three*, współautorzy Katarzyna Mazowiecka i Armin Schikorra, arXiv:1811.00515
- [30] *On the size of the singular set of minimizing harmonic maps into the 2-sphere in dimension four and higher*, współautorzy Katarzyna Mazowiecka i Armin Schikorra, arXiv:1902.03161
- [32] *Discrete Reifenberg-type theorem*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 43 (2018), 3-19.
- [33] *On Hölder regularity of the singular set of energy minimizing harmonic maps into closed manifolds*, arXiv:1806.08607

Trzy prace są dostępne na arXiv.org, zaś jedna praca [32] została już opublikowana. Pan Michał Miśkiewicz opublikował samodzielnie jeszcze dwie następujące prace, które nie są uwzględnione w rozprawie doktorskiej.

- *Fractional differentiability for solutions of the inhomogeneous p-Laplace system*, Proc. Amer. Math. Soc. 146 (2018), 3009-3017.
- *A weak compactness result for critical elliptic systems of n-harmonic type*, J. Math. Anal. Appl. 439, 1 (2016), 370–384.

Prace opublikowane są w dobrych czasopismach specjalistycznych i biorąc pod uwagę, że jest to rozprawa doktorska, to liczba przygotowanych oraz opublikowanych prac zasługuje niewątpliwie na uznanie.

Tematyka rozprawy dotyczy zagadnień odwzorowań harmonicznych i wkład w tę teorię mają światowej klasy matematycy m.in. Bethuel, Brezis, Coron, Eells, Hardt, Lieb, Lin, Riviere, Schoen, Struwe, Uhlenbeck, Yau i jest rozwijana od kilkudziesięciu lat. Mgr Michał Miskiewicz bardzo dobrze orientuje się w literaturze, wskazał klasyczne wyniki powyższych autorów, jak również wykazał znajomość prac opublikowanych niedawno przez Nabera i Valtortę w prestiżowych czasopismach Annals of Mathematics (2017) oraz Journal of the European Mathematical Society (2019). Zatem mogę stwierdzić, że Autor rozprawy sięga po trudną literaturę matematyczną z najwyższej półki.

Opis rozprawy doktorskiej oraz głównych wyników. Rozdział 1 zawiera klasyczne wyniki dotyczące odwzorowań harmonicznych i problemu minimalizacji na rozmaitościach. Znajdziemy tutaj cele rozprawy, które są ambitne i dobrze przedstawione oraz zachęcają do dalszej lektury. W rozdziale tym, lub ogólnie w całej w rozprawie brakuje jednak listy oznaczeń symboli używanych w pracy. Np. na stronie 3, przydałoby się wyjaśnienie symboli $W^{1,2}$ oraz $\mathbf{B}^n$. Rozdział, który wprowadza do trudnej i technicznej tematyki liczy tylko 14 stron i wymaga od czytelnika poszukiwania wyjaśnień w kolejnych rozdziałach i cytowanej literaturze.

Kolejny Rozdział 2 bazuje na pracach Schoena, Uhlenbeck oraz Simona i zawiera podstawowe własności odwzorowań harmonicznych $u : \mathbf{B}^n \to \mathcal{N}$ minimalizujących energię, gdzie $\mathcal{N}$ jest zamkniętą rozmaitością riemannowską. Autor przedstawił szkice dowodów znanych wyników dot. regularności odwzorowań o wartościach w $\mathbb{S}^2$ bazując na pracy Almgrena i Lieba. Autor stopniowo wprowadza narzędzia (Twierdzenia 2.6.1, 2.6.3, 2.6.4, 2.6.6), które zostaną wykorzystane w Rozdziale 6 i 7. Chciałbym wskazać jedną uwagę odnośnie Twierdzenia 2.4.1. W cytowanej pracy Brezisa, Corona, Lieba [4] twierdzenia w tej postaci niestety nie ma. Przydałby się szkic dowodu Twierdzenia 2.4.1 prezentujący użycie Twierdzeń 7.1, 7.3 oraz 7.4 z cytowanej pracy [4].

Rozdział 3 opisuje wyniki uzyskane w samodzielnej pracy Autora [33]. Mianowicie, klasyczny wynik Hardta i Lina opisuje zbiór punktów osobliwych przekształcenia harmonicznego $u : \mathbf{B}^4 \to \mathbb{S}^2$. W kolejnym wymiarze, tzn. dla $u : \mathbf{B}^5 \to \mathbb{S}^3$ podobny wynik został udowodniony przez Lina i Wanga w 2006 roku [26]. Głównym celem Rozdziału 3 jest uzyskanie uogólnienia dla odwzorowań określonych na n-wymiarowej kuli jednostkowej, gdzie $n \geq 3$, o wartościach w zamkniętej rozmaitości riemannowskiej. Na szczególną uwagę zasługuje Twierdzenie 3.1.3 oraz Wniosek 3.1.5, gdzie autor wykazał, że najwyżej wymiarowa część zbioru osobliwego jest otwartym podzbiorem zbioru osobliwego, ponadto jest to rozmaitość $(n-3)$-wymiarowa klasy Höldera $C^{0,\gamma}$ dla każdego $\gamma \in (0,1)$. Użyte narzędzia w dowodzie pokazują biegłą znajomość technik Schoen i Uhlenbeck oraz twierdzenia Reifenberga.

Rozdział 4 jest wprowadzeniem do twierdzenia Nabera i Valtorty z 2017 roku, które odpowiada na otwarty problem dot. oszacowania wymiaru Hausdorffa zbioru osobliwego odwzorowań harmonicznych w wyższych wymiarach. W wymiarze 3 znany był wynik Schoen i Uhlenbeck. Ogólne podejście Nabera i Valtorty zostało naszkicowane w Rozdziale 4.3. Głównym wynikiem Rozdziały 5 jest dyskretna wersja twierdzenia Reifenberga (Twierdzenie 5.1.1), które zostało opublikowane w pracy [32]. Technika dowodu polega na argumentach zaczerpniętych z pracy Nabera i Valtorty.

Rozdziały 6 i 7 przedstawiają wyniki uzyskane wspólnie z Katarzyną Mazowiecką oraz Arminem Schikorrą [29,30]. Almgren i Lieb w 1988 roku oszacowali liczbę osobliwości minimalizującego przekształcenia harmonicznego $u : \Omega \to \mathbb{S}^2$ poprzez stałą zależną od obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 3)$ oraz energię Dirichleta na brzegu *ang. the boundary Dirichlet's energy integral.* Wyżej wymieniony klasyczny wynik został uogólniony na dowolny wymiar $n \geq 3$ i przedstawiony w Twierdzeniu 6.1.1. Moim zdaniem jest to najciekawszy wynik rozprawy. Wprawdzie bazuje on na oryginalnym dowodzie Almgrena oraz Lieba, jednakże zawiera również nowe pomysły, które są istotnie potrzebne w wyższych wymiarach. Almgren oraz Lieb wykorzystują klasyfikację przekształceń harmonicznych z kuli w $\mathbb{R}^3$ o wartościach w $\mathbb{S}^2$, czyli wymiarze $n = 3$. W wyższych wymiarach $\mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^2$ dla $n \geq 4$ podobna klasyfikacja jest trudna do uzyskania. Autor rozprawy wspólnie z Katarzyną Mazowiecką oraz Arminem Schikorrą zauważyli, że w wyższych wymiarach wystarczy wykorzystać własność przedłużania odwzorowań w przestrzeni Sobolewa $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$ określonych na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. To pozwala na uzyskanie wariantu Twierdzenia 2.4 z pracy Almgrena i Lieba pokazującego regularność odwzorowań daleko od *hotspotów.* Ostatni rozdział rozprawy prezentuje wynik dotyczący stabilności punktów osobliwych przekształceń harmonicznych określonych na ograniczonej i gładkiej dziedzinie $\mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{S}^2$. Mianowicie, zgodnie z Twierdzeniem 7.1.1 jeśli dwa odwzorowania są blisko siebie w sensie normy Sobolewa, to ich osobliwości są również blisko siebie w sensie metryki Wassersteina. Jest to ciekawy wynik inspirowany klasycznym rezultatem Hardta i Lina w wymiarze $n = 3$ i został on również zawarty w pracy [30].

Konkluzja. Całą rozprawę oceniam bardzo wysoko. Zagadnienia są trudne, ambitne i stwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska mgra Michała Miśkiewicza jest na wysokim poziomie matematycznym, wnosi wartościowy wkład do aktualnej problematyki badawczej dot. osobliwości przekształceń harmonicznych. Uzyskanie ciekawych i nietrywialnych wyników w tym obszarze wymaga wysokich umiejętności technicznych, geometrycznych oraz dogłębnego zrozumienia najnowszych prac w czołowych czasopismach matematycznych. Dlatego stwierdzam jednoznacznie, że rozprawa spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim.

Wnoszę o dopuszczenie mgra Michała Miśkiewicza do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto biorąc pod uwagę wysoką ocenę pracy, rekomenduję wyróżnienie przedstawionej rozprawy.

Jarosław Mederski

Jarosław Mederski