dr hab. Przemysław Górka
e-mail: pgorka@mini.pw.edu.pl

Warszawa, 24 czerwca 2019

Ocena rozprawy doktorskiej
pt."Parabolic equations with very singular nonlinear diffusion"
pana mgr. Michała Łasicy

Pan Michał Łasica przygotował pracę doktorską dotyczącą równań parabolicznych z bardzo osobliwą nieliniową dyfuzją. Równania, które były badane w pracy, to równania typu

$$u_t = \operatorname{div}(B(u)),$$

gdzie $B(u) \sim \nabla u/|\nabla u|$. W przypadku $B(u) = \nabla u/|\nabla u|$, powyższe równanie jest potokiem gradientowym funkcjonału wahania całkowitego

$$TV(u) = \int |\nabla u|.$$

Zauważmy, że otrzymane równanie $u_t = \operatorname{div}(\nabla u/|\nabla u|)$ jest szczególnym przypadkiem równania parabolicznego z p-laplasjanem, tj. $u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Przypadek $p > 1$ jest dość dobrze zbadany i literatura jest obszerna. Natomiast teoria przypadku $p = 1$, którym zajmuje się pan Łasica, jest w powijakach i obecnie jest w jednym z głównych nurtów zainteresowań równań różniczkowych. Poruszana tematyka jest ciekawa oraz ważna z punktu widzenia zastosowań. Co więcej, jest to tematyka trudna. Wymaga rozległej wiedzy z analizy funkcjonalnej, przestrzeni BV, geometrycznej teorii miary, teorii równań cząstkowych, topologii oraz geometrii różniczkowej.

Rozprawa powstała na bazie licznych publikacji (trzy współautorskie z opiekunami naukowymi[1] i jeden samodzielny preprint). Z oświadczeń współautorów w sposób jednoznaczny wynika, że wkład Michała Łasicy w powstanie tych prac był zdecydowanie wiodący.

Praca pana Łasicy składa się z 5 rozdziałów, dodatku oraz bibliografii. W rozdziale wstępnym zostajemy wprowadzeni w tematykę pracy. Następnie, w kolejnych podrozdziałach wstępu, autor prezentuje główne wyniki pracy oraz w klarowny sposób przedstawia idee dowodów sformułowanych twierdzeń. Po przeczytaniu wstępu, czytelnik będzie mógł odnieść, zresztą słuszne, wrażenie, że w kolejnych rozdziałach czeka na niego 'kawał ciężkiej' analizy matematycznej.

Rozdział 2 rozpoczyna się od wprowdzenia przestrzeni funkcyjnych, oznaczeń, itp. Następnie badany jest ortotropowy potok całkowitego wahania na prostokącie Ω w $\mathbb{R}^2$, który jest zadany równaniem

$$u_t = (\operatorname{sgn} u_{x_1})_{x_1} + (\operatorname{sgn} u_{x_2})_{x_2}. \tag{1}$$

Na brzegu prostokąta Ω zadany jest zerowy warunek brzegowy Neumanna. Autor wprowadza definicję rozwiązania, gdzie naturalnym językiem, w którym pracuje się z powyższym równaniem jest język przestrzeni BV. Pierwszym celem tego rozdziału jest przeprowadzenie dowodu Twierdzenia 1.1., które orzeka, że jeśli u jest rozwiązaniem równania (**??**) z warunkiem początkowym

$$u_0 = \sum_{i,j=0}^{N} u_0^{i,j} \mathbb{I}_{Fi,j},$$

[1]Opiekunami naukowymi pana Łasicy są pan prof. Piotr Bogusław Mucha oraz pan dr José Salvador Moll Cebolla.

gdzie $F^{i,j}$ jest rodziną prostokątów o bokach równoległych do boków Ω, to istnieją ciągłe i kawałkami afiniczne funkcje $u^{i,j} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, takie, że u ma postać

$$u(t,.) = \sum_{i,j=0}^{N} u^{i,j}(t)\mathbb{I}_{F^{i,j}}.$$

W celu przeprowadzenia dowodu, autor wprowadza geometrię zbiorów wielokątnych o bokach równoległych do osi układu współrzędnych i klasę $PCR(\Omega)$, która składa się z funkcji z przestrzeni $BV(\Omega)$, które są stałe na prostokątach. W tym momencie czytelnik mógłby stwierdzić, że mamy do czynienia z bardzo elementarnymi obiektami, jakimi są prostokąty. Nic bardziej mylnego! Głównym narzędziem dowodowym są tzw. ilorazy Cheegera. Autor uzasadnia, że ilorazy Cheegera minimalizowane są przez wielokąty o bokach równoległych do boków Ω (Twierdzenie 2.1.). Twierdzenie 2.1. jest bardzo ładnym wynikiem, którego dowód jest skomplikowany i cały ciężar dowodowy został przeniesiony na Lemat 2.2. Następnie, używając wspomnianego twierdzenia, udowadnia Lemat 2.3. i przechodzi do dowodu Twierdzenia 1.1. Kolejny krok, to dowód Twierdzenia 1.1 w przypadku $\Omega = \mathbb{R}^2$. W podrozdziale 2.5 autor udowadnia Twierdzenie 1.2., które stanowi, że rozwiąznie równania (**??**) z ciągłymi danymi początkowymi jest funkcją ciągłą w każdej chwili czasu. Dowód zaczyna od Lematu 2.5., który można nazwać twierdzeniem o stabilności. Następnie przybliża dane początkowe funkcjami z klasy PCR, stosuje Lemat 2.5 i przechodzi do granicy. Rozdział 2 zamykają przykłady, np. w przykładzie 2.3. możemy się przekonać, że założenie wypukłości obszaru w Twierdzeniu 1.2. jest istotne.

W Rozdziale 3 badane jest równanie

$$u_t = u_{xx} + \frac{\alpha}{2}(\mathrm{sgn} u_x)_x \quad x \in \mathbb{T}. \tag{2}$$

Na powyższe równanie możemy patrzeć, jak na inkluzję różniczkową $u_t \in -\partial \mathcal{J} u$, gdzie $\mathcal{J}$ jest funkcjonałem na $L^2(\mathbb{T})$ określonym wzorem

$$\mathcal{J} u = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} u_x^2 + \alpha|u_x| & \text{jeśli } u \in H^1 \\ \infty & \text{jeśli } u \in L^2 \setminus H^1 . \end{cases}$$

Autor rozpoczyna analizę powyższego zagadnienia od scharakteryzowania zbioru podróżniczki oraz jej dziedziny (Stwierdzenie 3.1.). Dowód tego stwierdzenia jest raczej standardowy. Następnie prezentuje Lemat 3.1., z którego dowiadujemy się, jak można reprezentować funkcje z dziedziny podróżniczki funkcjonału $\mathcal{J}$. Podrozdział 3.2 zawiera wyniki o regularności rozwiązań (Lemat 3.2.) oraz o stabilizacji (Lemat 3.3.). Ostatnia część tego podrozdziału zawiera dowód Twierdzenia 1.3., który jest najważniejszym wynikiem Rozdziału 3. Twierdzenie 1.3. jest bardzo ładnym, geometrycznym wynikiem, a jego dowód bazuje na Lamatach 3.1.-3.3. oraz na argumentach topologicznych.

W Rozdziale 4 autor bada potok wahania całkowitego na funkcjach z odcinka I w przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^n$. Główny wynik to Twierdzenie 1.4., które mówi, że jeśli u jest rozwiązaniem wspomnianego potoku spełniającym warunek początkowy $u_0 \in BV(I;\mathbb{R}^n)$, to dla prawie wszystkich $t > 0$ oraz dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset I$ zachodzi

$$|u_x(t)|(A) \leq |u_{0,x}|(A).^2$$

W celu wykazania twierdzenia, pan Łasica zaczyna pracę ze zregularyzowanym zagadnieniem. Dla rozwiązań równania zregularyzowanego z gładkimi danymi początkowymi pokazuje oszacowania

[2] Jeśli $u \in BV$, to u_x jest miarą.

à la Caccioppoli w normach L^p (Lemat 4.1.). Następnie przechodzi z parametrem regularyzacji do 0 oraz z p do 1. W ten sposób otrzymujemy tezę twierdzenia dla gładkich danych początkowych oraz gdy A jest odcinkiem domkniętym. W kolejnym kroku autor regularyzuje dane początkowe i po przejścu granicznym otrzymuje tezę, gdy A jest odcinkiem postaci $[x_0 - r, x_0 + r]$ takim, że $|u_{0,x}|(\partial[x_0 - r, x_0 + r]) = 0$. W celu zamknięcia dowodu stosujemy wersję twierdzenia Vitaliego o pokryciu, a następnie korzystamy z regularności miary.

Ostatni rozdział poświęcony jest analizie potoku przekształceń 1-harmonicznych z Ω [3] w zupełną rozmaitość riemannowską $\mathcal{N}$. Na mocy Twierdzenia Nasha o izometrycznym zanurzeniu, $\mathcal{N}$ możemy traktować, jak podrozmaitość przestrzeni euklidesowej. Autor zaczyna badania od wykazania Twierdzenia 1.5. o jednoznaczności rozwiązań. Następnie, zakładając wypukłość obszaru Ω, domkniętość zanurzenia rozmaitości $\mathcal{N}$ w przestrzeń euklidesową oraz że $K_{\mathcal{N}} < \infty$[4] udowadnia istnienie lokalnych w czasie rozwiązań dla danych początkowych u_0 z klasy $W^{1,\infty}(\Omega, \mathcal{N})$. Zakładając dodatkowo, że $K_{\mathcal{N}}$ jest niedodatnie, otrzymuje globalne w czasie rozwiązania. W celu wykazania powyższego twierdzenia, pan Łasica rozważa zagadnienie zregularyzowane i wykazuje oszacowania a priori. Następnie, używając wyników Acquistapace-Terreni, wykazuje istnienie rozwiązań zagadnienia zregularyzowanego. W kolejnym kroku, udowadnia twierdzenie o istnieniu w przypadku gładkiego Ω oraz dostatecznie regularnuch danych początkowych. Ostatni krok, to pozbycie się założeń na regularność obszaru i dane początkowe. Tutaj z pomocą przychodzą Lematy A.2. oraz A.3. z dodatku. W Podrozdziale 5.4 zaprezentowany jest dowód Twierdzenia 1.7., które z grubsza, mówi, że jeśli $u_0(\Omega)$ jest zawarty w kuli geodezyjnej $\bar{B}_R(p_0)$ o dostatecznie małym promieniu R, to $u(t, \Omega) \subset \bar{B}_R(p_0)$. Twierdzenie 1.8., którego szkic dowodu jest umieszczony w Podrozdziale 5.5, orzeka, że jeśli Ω jest zbiorem wypukłym, $\mathcal{N}$ jest zupełną rozmaitością riemannowską taką, że $K_{\mathcal{N}} \leq 0$, to dla danych początkowych z $W^{1,\infty}(\Omega, \mathcal{N})$ istnieje globalne rozwiązanie, które stabilizuje się w skończonym czasie. Ostatni podrozdział dotyczy badania potoku przekształceń 1-harmonicznych między zwartą i orientowalną rozmaitością riemannowska $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$, która jest zwartą podrozmaitością przestrzeni euklidesowej. Wykazuje, w szczególności, że jeśli $K_{\mathcal{N}}$ jest niedodatnia $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, to istnieją globalne rozwiązania oraz jeśli dodatkowo założymy, że tensor Ricciego rozmaitości $\mathcal{M}$ jest nieujemny, to istnieje ciąg chwil czasowych t_k rozbieżny do nieskończoności, taki, że $u(t_k) \to u_*$ w topologii $C(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, gdzie u_* jest funkcją 1-harmoniczną. W konsekwencji, zakładając odpowiednie znaki na krzywiznę sekcyjną i tensor Ricciego, otrzymujemy, że każda funkcja z $W^{1,\infty}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ jest homotopijna z funkcją 1-harmoniczną.

Rozprawa pana Michała Łasicy zawiera szereg ważnych i nietrywialnych wyników. Autor używa biegle aparatu z wielu działów współczesnej matematyki. Bez wątpienia, rezultaty zaprezentowane przez autora kwalifikowałyby pracę do wyróżnienia. Niestety, niektóre fragmenty dowodów napisane są zbyt lakonicznie (patrz uwagi na końcu opinii), czasem wręcz nonszalancko. Nie mam tutaj na myśli drobnych literówek. Rozprawa powstała w procesie zlepienia czterech artykułów autora. Pozwoliłem sobie obejrzeć artykuły pana Łasicy. Nie zarejestrowałem większych różnic między dowodami zamieszczonymi w artykułach a tymi, które znajdują się w rozprawie. Doskonale wiemy, że w artykułach naukowych nie zawsze zamieszcza się wszystkie szczegóły dowodów. W rozprawie doktorskiej powinno się unikać takiego stylu, tj. wszystkie 'oczywiste oczywistości' powinny być szczegółowo uzasadnione. Szkoda, że pan Łasica tego nie zrobił. Mógł np. usunąć jeden z rozdziałów, a pozostałe rozpisać szczegółowo; w takiej formie praca stanowiłaby rozprawę wybitną.

Podsumowując, biorąc pod uwagę dokonane osiągnięcie, stwierdzam, że pan Łasica jest dojrza-

[3] W większości twierdzeń, autor zkłada, że Ω jest lipszycowskim obszarem w przestrzeni euklidesowej, wyjątek stanowi Twierdzenie 1.9., gdzie Ω jest zwartą i orientowalną rozmaitością riemannowską.

[4] $K_{\mathcal{N}} = \{K_p(u,v) : p \in \mathcal{N}, u, v \in T_p\mathcal{N}\}$, gdzie $K_p(u,v)$ jest krzywizną sekcyjną rozmaitości $\mathcal{N}$.

łym matematykiem, a przedstawiona **rozprawa doktorska spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim i proszę o dopuszczenie pana Michała Łasicy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Szczegółowe uwagi i sugestie:

1. 9^8 - zmiast $u($, powinno być $u_0($,
2. (1.8) oraz (1.10) - lepiej napisać argumenty czasu w wyrażeniach definiujących F^+ oraz F^-,
3. 13^6 - jaką postać ma u poza zbiorem C?
4. 13^7 - warto doprecyzować w jakim sensie zbiór C jest maksymalny,
5. strona 13, Twierdzenie 1.1. - warto precyzyjnie napisać, że u jest rozwiązaniem zagadnienia ...,
6. strona 14, Twierdzenie 1.2. - zamiast 1.19, powinno być (1.19). Czy nie zakładamy, że $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$ oraz monotniczności ω_1, ω_2?
7. 16^4 - czy to nie jest nawet zwarta przestrzeń metryczna?
8. 16^7 - czy zamiast $\mathcal{L}^0 u$, nie powinno być $\mathcal{L}^0 u_0$?
9. 16^{13} - brak t,
10. strona 16 - warto spróbować napisać, o co tak naprawdę chodzi w Twierdzeniu 1.3., gdyż samo sformułowanie twierdzenia jest długie,
11. strona 16 - warto przypomnieć, jakie są związki między metryką Hausdorffa, a zbieżnością w sensie Kuratowskiego,
12. strona 17, Twierdzenie 1.4. - w sformułowaniu warto napisać założenia,
13. 18^6 - zamiast $\mathbb{R}^m$, powinno być $\mathbb{R}^n$,
14. 19^3 - warto napisać coś więcej o Twierdzeniu Nasha o izometrycznym zanurzeniu w przestrzeń euklidesową,
15. 22^2 oraz 22^3 - zamiast $\in$, powinno być $\subset$,
16. 22_8 - dodałbym, że jest to rozmaitość wymiaru m,
17. strona 24, Twierdzenie 1.9. - warto napisać czym jest u,
18. 24^{10} - warto napisać prosty argument wyjaśniający, dlaczego istotnie u_* oraz u_0 są homotopijne,
19. strona 26, wyrażenie (2.1) - całka powinna być liczona względem $m - 1$-wymiarowej miary Hausdorffa,
20. strona 27, Stwierdzenie 2.1. - warto sprecyzować, gdzie zawarty jest zbiór Ω, zważywszy, że w (2.5) używamy m-wymiarowej miary Lebesguea, w (2.6) mamy $m - 1$-wymiarową miarę Hausdorffa na brzegu, w (2.7) całkujemy względem 2-wymiarowej miary Lebesguea, a po stwierdzeniu, autor pisze, że powyższe stwierdzenie jest prawdziwe jeśli $\Omega = \mathbb{R}^2$,

21. 29^{13} - autor pisze ..if both $\partial F^{\pm}$ are subordinated to G, ale wcześniej nie wyjaśnił co to oznacza, że krzywa jest podporządkowana G,

22. strona 29 - chyba w definicji $PCR(\Omega)$ lepiej jest napisać wprost, że w należy do PCR jeśli $w = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{I}_{Q_i}$ prawie wszędzie, gdzie Q_i są prostokątami,

23. 30^9 - zamiast Q_w, powinno być $\mathcal{Q}_w$,

24. strona 31 - warto uzasadnić precyzyjnie przejście z lini 5 do 8,

25. 31^8 - czy symbol $d\mathcal{L}^2$ powinien znajdować się w tym wyrażeniu?

26. 31^{15} - czy zamiast $\tilde{E} \subset F$ nie powinno być $\tilde{E} \subset F_0$?

27. 31_7 - warto napisać bardziej szczegółowo,

28. 31_1 oraz 31_2 - zamiast F powinno być F_0, te nierówności warto uzasadnić,

29. 32_{14} - warto uzasadnić równość oraz nierówność,

30. 32_{12} - czy zamiast $\tilde{E}_0$ nie powinno być $\tilde{E}$,

31. 32_7 - zamiast symbolu $\subset$, powinien być symbol $\in$, czy $L = L_0$?

32. strona 33, linia 2 oraz 3 - czy $F = F_0$ oraz $F^- = F_0^-$?

33. 33_{12} - jak definiujemy $\hat{E}_i$?

34. 33_3 - powinno być $F_n \subset F_0$ oraz $F_n \in \mathcal{F}(G)$,

35. 34_5 - chyba powinno być $F_1 \in \mathcal{F}(G(Q))$?

36. 35^5 - warto szczegółowo uzasadnić dlaczego F_k jest minimaizerem,

37. 35^{16} - warto uzasadnić pierwszą równość,

38. 35^{19} - autor pisze 'has positive measure and finite perimeter'. Skończoność miary jest oczywista, druga część zdania wymaga uzasadnienia.,

39. strona 35, koniec dowodu - warto szczegółowo wyjaśnić, dlaczego istotnie η jest tym polem wektorowym, którego szukamy,

40. 35^7 - jest $\mathcal{R}$, powinno być $\mathbb{R}$,

41. 35^{11} - chyba powinno być $G_{\tilde{u}(t,.)} \subset G_{(u_0, \mathrm{div} z_0)}$,

42. 35^{18} - autor używa Stwierdzenia 2.2. o jednoznaczności rozwiązań globalnych. Jak dotąd $\tilde{u}$ jest rozwiązaniem lokalnym określonym na $[0, t_1]$,

43. 35_5 oraz 35_{15} - zamiast Twierdzenie 2.3., powinno być Stwierdzenie 2.3.,

44. 35_7 - brakuje $L^2(\Omega)$,

45. 35_3 - warto dokładnie uzasadnić, jak z Lematu 2.1. wynika równoważność wymienionych przez autora dwóch zagdanień wariacyjnych,

46. 39^3 - warto wyjaśnić nierówność,

47. 40_5 - czy stała C nie jest proporcjonalna do odwrotności stałej w nierówności Sobolewa?

48. 41^3 - czy nie powinno być tak, że $\mathcal{R}^2_{1,m}(G)$ dla $0 \leq m \leq m_2 - 3$?

49. 41_8 - czy nie powinniśmy wiedzieć, że teza jest prawdziwa dla początkowego k, np. dla $k = 0$?

50. 42_7 - czy te inkluzje nie wymagają uzasadnienia?

51. 42_2 - warto napisać, że jest to dowód Twierdzenia 1.2.,

52. strona 43, nierówność (2.41) - po prawej stronie nierówności brakuje znaku sumy,

53. 43^{10} - czy do prawej strony nierówności nie powinniśmy dodać składnika $\omega_1(1/k) + \omega_2(1/k)$?

54. 47_{11} - warto uzasadnić, że w należy do zbioru podróżniczki,

55. 47_{10} - lepiej napisać, że testujemy $\psi = \pm 1$,

56. 47_1 - po prawej stronie nierówności brakuje czynnika $\alpha/2$,

57. 48^1 - warto to uzasadnić,

58. strona 48, ostatni akapit dowodu Stwierdzenia 3.1. - zbyt lakonicznie,

59. strona 49, wyrażenie (3.10) - pod całką powninno być $\sqrt{F}$,

60. strona 49 - ostatni akapit napisany jest zbyt lakonicznie,

61. strona 50, nierówność (3.17) - warto zamieścić dowód tej nierówności,

62. 50_{15} - jak otrzymujemy tę nierówność?

63. strona 50 - nie zaszkodzi wytłumaczyć dlaczego u^ϵ spełnia zasadę maksimum, jak również dlaczego wyrażenia w 50_{12} są ograniczone niezależnie od ϵ,

64. 50_6 - skąd otrzymujemy zbieżność $u_x^{\epsilon_n} \to \bar{u}_x$?

65. 50_1 - warto uzasadnić pierwszą równość,

66. strona 51 - warto uzasadnić nierówności w 51^4 oraz 51^6,

67. strona 51, pierwsza linia dowodu Lematu 3.3. - chyba powinno być $\int_{\mathbb{T}} u_0 = 0$. Dlaczego $\int_{\mathbb{T}} u = 0$?

68. równość (3.18) - po prawej stronie równości powinno być $-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} u_x^2 + \alpha|u_x|$,

69. wyrażenie (3.19) - pierwsza nierówność, to nierówność Wirtingera z optymalną stałą[5], a drugiej nie potrafiłem uzasadnić. Z nierówności Schwartza, zachodzi nierówność w drugą stronę,

70. dowód Twierdzenia 1.3. - warto zamieścić rysunek, który ułatwi zrozumienie dowodu,

71. 51_5 - czy definicja zbioru $U_{s,t}$ jest poprawna?

[5]Szkoda, że autor o tym nie wspomniał.

72. 51_4 - jak używamy zasady maksimum?

73. 51_3 - dlaczego A_k są otwarte? Składowe spójności są domknięte.

74. 51_2 - czy nie powinno być napisane, że Γ_k jest krzywą łączącą (s, x_k) i (t, y_k)?

75. 51_1 oraz 52^1 - czy nie powinno być tak, że znak jest dodatni dla k parzystego i ujemny dla k nieparzystego?

76. 52^1 - warto napisać, że krzywe Γ_k oraz Γ_{k+1} nie przecinają się,

77. 52_{16} - jak otrzymujemy tę nierówność? Wydaje się, że z Lematu 3.1. otrzymamy podobną nierówność, gdzie zamiast u_0 jest u.

78. strona 52 - ostatnie trzy akapity napisane są zbyt skrótowo,

79. strona 53 - warto uzasadnić nierówności 53^{11} oraz (3.25),

80. 53^{16} - autor sugeruje, że jest to nierówność z Lematu 3.2. Nie udało mi się jej tam znaleźć.

81. 53_{11} - skąd wiemy, że $u_x^{\epsilon_n}$ zbiega jednostajnie do u_x?

82. 53_{10} - czy nie powinno być $L'_{\epsilon_n}(u_x^{\epsilon_n}) \to 1$?

83. 53_9 - jest 3.25, powinno być (3.25),

84. Dowód Twierdzenia 1.3. - czy istotnie zostało udowodnione oszacowanie $2m_0 \leq \alpha^{-2}\|\mathcal{L}^0 u\|_{L^2(\mathbb{T})}$?

85. $56^{3,4}$ - nie zaszkodzi uzasadnić odpowiedniego ograniczenia ciągów u^k oraz z^k,

86. 56_9 - jest to mniej lub bardziej znany fakt, lecz warto podać źródło lub zamieścić dowód.

87. 58^3 - warto doprecyzować, w jaki sposób szacujemy $\mathcal{A}_{u^1}(u^1_{x^j}, Z^1_j) - \mathcal{A}_{u^2}(u^2_{x^j}, Z^2_j)$,

88. strona 59, (5.6) - warto wyjaśnić iloczyny $:$, $\vdots$,

89. $60_{1,2}$ - zgadzam się, że nieujemność (5.14) można zauważyć. Natomiast, nieujemność (5.15) nie była dla mnie jasna.

90. 61^9 - warto wytłumaczyć dlaczego $\nu^\Omega \mathcal{A}^{\partial\Omega}$ jest niedodatnie,

91. 61^{13}, 69_{15} - warto wyjaśnić precyzyjnie, w jaki sposób dokonujemy przejścia granicznego,

92. 63^1 - dlaczego $\tau \circ u$ jest rozwiązaniem?

93. 63^8 - z czym otrzymujemy sprzeczność?

94. 63^{11} - jest $C^{3+\alpha}(\Omega)$, powinno być $C^{3+\alpha}(\Omega, \mathcal{N})$,

95. strona 63, dowód Twierdzenia 1.6. - warto uzasadnić, jak otrzymujemy oszacowanie $\mathrm{div} Z^\epsilon$ w L^2 oraz w jaki sposób otrzymujemy nierówność (5.27). Ponadto, nie zaszkodzi wytłumaczyć jak otrzymujemy, że ∇u oraz Z spełniają (1.47) oraz warunki brzegowe (1.49).

96. 64_{11} - jak z (5.24) otrzymujemy oszacowanie $\|f_k\|_{L^2((0,T)\times\Omega_k)}$ oraz dlaczego $f_k|_K \rightharpoonup f|_K$ w L^2?

97. strona 65, (5.33) - warto wyjaśnić, jak pojawia się $\cos \pi/2$ i dlaczego (5.33) kończy dowód,

98. 66^{13} - warto uzasanić tę nierówność,

99. 66^{14} - skąd pojawia się pierwsze wyrażenie po znaku równości?

100. 66_3 - przed całką brakuje czynnika $1/2$ oraz zamiast dist, powinno być dist_g,

101. Podrozdział 5.5 - dowód jest zbyt lakoniczny,

102. $69^{6,7,8}$ - czy zakładamy, że rozmaitość $\mathcal{M}$ jest bez brzegu?

103. dowód Lematu 5.6. - czy z dowodu wynika nierówność (5.42)?

104. 70^2 - jak otrzymujemy ciąg aproksymujący u_0^ϵ? Nie możemy zastosować Lematu A.2., który był sformułowany dla przestrzeni $W^{1,\infty}(\Omega, \mathcal{N})$, gdzie Ω jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej.

105. strona 70 - warto precyzyjnie wyjaśnić (5.55), (5.57) oraz (5.58),

106. strona 70 - warto uzasadnić dlaczego (5.56) jest równoważne $70_{10,11}$,

107. 70_5 - co oznacza słaba z gwiazdką zbieżność w $W^{1,\infty}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$? $W^{1,\infty}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ nie jest przestrzenią liniową.

108. 70_1 - dlaczego $\pi_{u(t_k,.)}(\mathrm{div}_\gamma Z(t_k, .)) \to \pi_{u_*}(\mathrm{div}_\gamma Z_*)$?

109. strona 71 - warto uzasadnić ostatnie zdanie z dowodu,

110. strona 72 - przed Lematem A.2. warto napisać, że w $W^{1,p}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ gęstość funkcji gładkich nie musi mieć miejsca i można wspomnieć o wyniku Bethuela,

111. 72^6 - w Lemacie A.2. brak założeń na regularność brzegu obszaru Ω,

112. 72^9 - warto uzasadnić regularność odworowania w,

113. strona 72, (5.59) - czy z prawej strony nierówności nie brakuje czynnika 2?

114. bibliografia - w referencjach [18, 19, 20, 23, 27, 28, 54, 66, 77, 78] brakuje imion autorów.