Wrocław, 29 grudnia 2017

dr hab. Szymon Żeberski
Wydział Podstawowych Problemów Techniki
Politechnika Wrocławska

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Michała Korcha "Measure and convergence: special subsets of the real line and their generalizations"

Rozprawę doktorską ”Measure and convergence: special subsets of the real line and their generalizations” napisaną przez mgra Michała Korcha można podzielić na trzy części. Pierwsza traktuje o małych podzbiorach przestrzeni Cantora 2^ω, druga dotyczy uogólnień (lub ich braku) twierdzenia Jegorowa, trzecia zaś – uogólnionej przestrzeni Cantora 2^κ z topologią ograniczoną.

W części pierwszej (stanowiącej rozdział drugi rozprawy) rozważane są małe podzbiory przestrzeni Cantora. Autor poszukuje analogonu pojęcia zbiorów doskonale pierwszej kategorii (ang. perfectly meager) w kontekście miarowym. Zostaje wprowadzone nowe pojęcie zbiorów doskonale miary zero (ang. perfectly null) oraz jego tranzytywna wersja. Podstawowe pytanie, czy nowo zdefiniowana klasa zbiorów doskonale miary zero jest równa klasie zbiorów uniwersalnie miary zero pozostaje otwarte. W pracy znajdujemy dwa wyniki stanowiące próbę zmierzenia się z tym problemem. Pierwszy (Proposition 2.9) pokazuje, że konstrukcji funkcji Łuzina (będącej głównym narzędziem w analogicznym problemie po stronie kategorii) nie można w naturalny sposób powtórzyć w przypadku miarowym. (Nie oznacza to, rzecz jasna, że takowa funkcja w ogóle nie istnieje.) Drugi rezultat (Corollary 2.14) stanowi, że zamkniętość klasy zbiorów doskonale miary zero na branie obrazów względem homeomorfizmów przestrzeni Cantora implikuje równość klas zbiorów doskonale miary zero oraz uniwersalnie miary zero. W dalszej części rozdziału drugiego autor wprowadza i bada analogony zbiorów doskonale miary zero (i dalej doskonale pierwszej kategorii) względem wyróżnionych klas zbiorów doskonałych. Są to klasy zbiorów zbalansowanie doskonałych, jednorodnie doskonałych, zbiorów doskonałych w sensie Silvera. W szczególności, okazuje się (Proposition 2.26), że klasa $v\mathcal{PN}$ zbiorów miary zero względem zbiorów doskonałych w sensie Silvera jest zamknięta na branie produktów, a (Theorem 2.27) przy założeniu istnienia zbioru Sierpińskiego klasa $b\mathcal{PN}$ zbiorów miary zero względem zbiorów zbalansowanie doskonałych nie jest zamknięta na branie produktów. Trzeba podkreślić, że rozumowania związane z rozważanymi tu klasami zbiorów są nietrywialne i dość subtelne. Autor wspiera czytelnika rysunkami, które pomagają zrozumieć dowody i przedstawiane w nich konstrukcje. Autor znajduje też interesujący analogon twierdzenia Bartoszyńskiego o rozkładzie zbioru miary zero na dwa tzw. zbiory małe. Pokazuje mianowicie (Corollary 2.4), że każdy zbiór P-miary zero można podzielić na dwa zbiory małe w P. Pojęcia zbioru P-miary zero i zbioru małego w P są zdefiniowane w sposób naturalny. Szereg pytań dotyczących rozważanym klas zbiorów pozostaje bez odpowiedzi, co zachęca do dalszej eksploracji tych zagadnień.

Druga część rozprawy (zawarta w rozdziale trzecim) poświęcona jest twierdzeniu Jegorowa, które stanowi, że dla dowolnego punktowo zbieżnego ciągu funkcji z $[0,1]$ w $[0,1]$ mierzalnych w sensie Lebesgue'a można znaleźć zbiór miary dowolnie bliskiej 1, na którym rozważany ciąg zbiega jednostajnie. Autor bada potencjalne uogólnienia tego twierdzenia. Po pierwsze rezygnuje z mierzalności wyjściowego ciągu funkcji. Po drugie, rozważa inne rodzaje zbieżności ciągu funkcji związane z ideałami na liczbach naturalnych: ideałową zbieżność punktową, ideałową zbieżność quasi-normalną, ideałową zbieżność jednostajną, I^*-punktową zbieżność, I^* quasi-normalną zbieżność, I^* jednostajną zbieżność. Głównym narzędziem w tej części jest uogólnienie metody Pinciroliego. Wynik ten został zawarty w trzech twierdzeniach (Theorem 3.1, Theorem 3.2, Theorem 3.3). W konsekwencji dostajemy dwa narzędzia. Pierwsze, przy założeniu $non(\mathcal{N}) < \mathfrak{b}$, daje uogólnienie twierdzenia Jegorowa dla pewnych rodzajów zbieżności ciągów $(f_n)_{n\in\omega}$ dowolnych funkcji $f_n : [0,1] \to [0,1]$. Drugie, przy założeniu $non(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$, daje ciąg funkcji $(f_n)_{n\in\omega}$, $f_n : [0,1] \to [0,1]$, który nie spełnia tezy uogólnionego twierdzenia Jegorowa dla pewnych rodzajów zbieżności. Otrzymujemy nowe ciekawe wnioski. W szczególności następujące zdanie:

"Dla dowolnego $\epsilon > 0$, dowolnego przeliczalnie generowanego ideału I oraz

dowolnego ciągu $(f_n)_{n\in\omega}$, $f_n : [0,1] \to [0,1]$ *punktowo* I*-zbieżnego znajdziemy zbiór* A, $\lambda(A) > 1-\epsilon$, *na którym ciąg* $(f_n)_{n\in\omega}$ *jest jednostajnie* I*-zbieżny."* jest niezależne od ZFC (Corollary 3.11, Corollary 3.13). Analogiczne rezultaty są także prawdziwe dla następujących par zbieżności: ideałowo punktowa i równo-ideałowa dla analitycznych P-ideałów (Corollary 3.6, Corollary 3.8), punktowo-I^* i jednostajnie-I^* dla przeliczalnie generowanych ideałów (Corollary 3.15, Corollary 3.17), ideałowo punktowa i jednostajnie ideałowa dla ideałów postaci Fin^α, $\alpha < \omega_1$ (Theorem 3.18, Theorem 3.19).

Trzecia część rozprawy (rozdziały czwarty, piąty, szósty, siódmy i ósmy) dotyczą uogólnionej przestrzeni Cantora. Bazę topologii w rozważanej przestrzeni 2^κ stanowią zbiory postaci $[\sigma] = \{x : \ x \supseteq \sigma\}$ dla $\sigma \in 2^{<\kappa}$. Autor systematyzuje klasy małych zbiorów tej przestrzeni i bada zależności między nimi. Rezultaty z tym związane wykorzystują podobieństwo uogólnionej przestrzeni z ograniczoną topologią do klasycznej przestrzeni Cantora. W wielu przypadkach potrzebne są do tego dodatkowe założenia o liczbie κ, na przykład $\kappa = [\kappa]^{<\kappa}$, κ jest słabo zwarta. Przeniesienie twierdzeń z 2^ω na 2^κ wymagało też znalezienia właściwych analogonów pojęć. W szczególności naturalnym odpowiednikiem pojęcia zbioru doskonałego (w 2^ω) jest pojęcie zbioru κ-doskonałego (w 2^κ), a nie zbioru doskonałego. Autor rozważa też pojęcia oraz formułuje rezultaty związane z zasadami selekcji (ang. selection principles) w 2^κ. Pojawiają się odpowiedniki γ-zbiorów, a także zbiorów z własnością Hurewicza, Mengera, Rothbergera. Autor rozważa też różne pojęcia zbieżości i ideałowej zbieżności ciągów funkcji $(f_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, $f_\alpha : 2^\kappa \to 2^\kappa$. Podejmuje także próbę uogólnienia twierdzenia Jegorowa na przestrzeń 2^κ. Pojawia się jednak bardzo istotny problem. Mianowicie, nie jest jasne, czy istnieje nietrywialna κ-proto miara posiadająca szereg dodatkowych własności. Istnienie owej κ-proto miary jest kluczowym założeniem w przedstawionych uogólnieniach twierdzenia Jegorowa.

Rozprawa jest bardzo obszerna. W mojej ocenie nie jest to zaletą. Zawartość merytoryczna w zupełności wystarczyłaby na dwie rozprawy doktorskie. Powodem tak dużej objętości jest próba dokładnego zgłębienia rozważanych zagadnień. W części dotyczącej małych podzbiorów Cantora autor rozważa analogony pojęć zbiorów doskonale pierwszej kategorii i doskonale miary zero względem trzech rodzin zbiorów doskonałych. Wprowadza też tranzytywne odpowiedniki tych klas. Porównanie zaprezentowanych klas zbiorów, choćby ze względu na ich liczbę, generuje wiele wyników. Podobna sytuacja ma miejsce w części dotyczącej twierdzenia Jegorowa. Autor rozważa sześć pojęć zbieżności ciągu funkcji związanych z ideałami na zbiorze liczb naturalnych. Część trzecia, dotycząca uogólnionej przestrzeni Cantora, stanowi próbę uogólnienia klasycznych wyników oraz wyników uzyskanych w poprzednich częściach. Istotna liczba zamieszczonych w tej części rezultatów polega na starannym przepisaniu dowodów analogicznych twierdzeń dotyczących klasycznej przestrzeni Cantora. Niechybnie stworzenie owej części wymagało ogromnej pracy i wnikliwego przestudiowania literatury. Tymniemniej, w mojej ocenie, część trzecia mogłaby zostać z rozprawy usunięta bez szkody, a może nawet z korzyścią, dla całości.

Rozprawa napisana jest w języku angielskim. Nie czuję się specjalistą w tej dziedzinie, w moim odczuciu liczba błędów językowych jest znikoma. Pracę czyta się dobrze. Organizacja całości jest właściwa i przemyślana. Wydaje się, że rozdział pierwszy poświęcony podstawowym pojęciom mógłby zostać nieco skrócony. W szczególności definicję liczby porządkowej, czy liczby kardynalnej można spokojnie pominąć. Układ tekstu jest logiczny i klarowny. W podrozdziale 2.4 organizacja treści nie podoba mi się. Autor opisuje tam dwa podejścia do znalezienia analogonu rozkładu Bartoszyńskiego zbioru miary zero na dwa zbiory małe: pierwsze nieudane, drugie udane. Taki układ ma na celu, jak sądzę, zdynamizować pracę i pokazać jaką drogą autor dochodził do prawdy. Wolałbym jednak mniej dynamiczną wesję.

Poniżej kilka błądów edytorsko-językowych:

7_{7-6} Niezręczne sformułowanie: ”W niniejszej pracy badam te klasy zbiorów w takim przypadku.”

28^6 Powinno być: ”null-additive”, ”meagre-additive”.

31^{14} Powinno być: ”$(\mathcal{U}'_n)$” i dalej: ”$\mathcal{U}'_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$”.

33_9 Powinno być: ”another” zamiast ”an another”.

40_{10} Powinno być ”the Baire”, brakuje spacji.

49^{8-9} Zamiast ”a method similar way” powinno być: ”a similar method”.

53^8 Zamiast ”$\mu \circ h_P$” powinno być ”$\mu(h_P$”.

71^1 Zamiast ”is in the positive” powinno być ”is positive”.

75_{12} Powinno być: ”We start with”.

87 Słowo ”even” mogłoby zniknąć z tytułu.

94_2 Powinno być: ”$(x_\alpha) \in (2^\kappa)^\kappa$”.

133_{11} Powinno być: ”κ-Cauchy” zamiast ”κ-I-Cauchy.

Podsumowując, w rozprawie zdefiniowano kilka nowych ciekawych pojęć. Zawiera ona nietrywialne rezultaty, których dowody wymagały subtelnych rozwiązań oraz twórczej inwencji autora. Ogrom wprowadzonych pojęć oraz sprawność z jaką autor się nimi posługuje świadczy o jego erudycji i kulturze matematycznej.

Rozprawa "Measure and convergence: special subsets of the real line and their generalizations" mgra Michała Korcha spełnia zarówno ustawowe, jak i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę przeto o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie mgra Michała Korcha do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Szymon Żeberski