Łódź, dn. 20 grudnia 2017 r.

Prof. dr hab. Marek Balcerzak
Instytut Matematyki
Politechniki Łodzkiej

Recenzja pracy doktorskiej Pana magistra Michała Korcha pt. „Measure and convergence: special subsets of the real line and their generalizations"

Rozprawa doktorska Michała Korcha liczy 191 stron i składa się z dziewięciu rozdziałów. Rozdział 1 zawiera preliminaria. Tematem Rozdziału 2 są specjalne podzbiory przestrzeni Cantora. Duża część wyników tego rozdziału została opublikowana w Biuletynie PAN. Rozdział 3 zawiera daleko idące uogólnienia twierdzenia Jegorowa dla ciągów funkcji działających z przedziału w przedział. Wyniki tego rozdziału znajdują się w artykule autora rozprawy wydrukowanego w Real Analysis Exchange. W Rozdziałach 4–8 zostały zbadane klasy zbiorów małych w 2^κ oraz różne rodzaje zbieżności ciągów w tej przestrzeni i ciągów funkcji działających z uogólnionej przestrzeni Cantora 2^κ w siebie. Rezultaty tych rozdziałów przygotowywane są do publikacji. Rozdział 9 stanowi podsumowanie głównych tez pracy. Zarysowano też w nim perspektywę dalszych badań.

Wyniki Rozdziału 2 są ważne i interesujące. Wprowadzono tu dwa nowe pojęcia, zbioru doskonale miary zero i zbioru doskonale miary zero w sensie tranzytywnym, będące odpowiednikami znanych i zbadanych pojęć dla kategorii Baire'a. Definicje tych pojęć zostały poprzedzone niezbędną formalizacją, w której zastosowano drzewa doskonałe w przestrzeni Cantora, wprowadzono homeomorfizm kanoniczny na doskonałym zbiorze P przestrzeni Cantora oraz miarę kanoniczną na P. Koncepcja kanonicznego homeomorfizmu wydaje się w pierwszej chwili dość skomplikowana. Jednak autor przybliżył ją dość zręcznie za pomocą przykładów i rysunków. Zaproponowane dwie nowe klasy $P\mathcal{N}$ i $P\mathcal{N}'$ zbiorów małych w sensie miary dobrze wpisują się do istniejącej hierarchii. Udanym pomysłem było rozważenie trzech podklas rodziny zbiorów doskonale miary zero, skojarzonych odpowiednio ze zbiorami doskonałymi zbalansowanymi, jednorodnymi oraz Silvera. Dla tych nowych klas zbiorów małych autor wraz z promotorem zbadali, czy odpowiednie inkluzje między rodzinami zbiorów są właściwe i czy te rodziny są zamknięte względem produktu kartezjańskiego dwóch zbiorów. Uzyskano serię nowych nietrywialnych twierdzeń – część z nich zachodzi w ZFC, a inne wymagają użycia dodatkowych założeń teoriomnogościowych. Często motywacją i inspiracją były techniki zastosowane wcześniej dla przypadku kategorii. Jednakże wiele rozumowań zawiera całkiem nowe pomysły o charakterze kombinatoryczno-obliczeniowym (np. dowód Twierdzenia 2.27). Korzystne wrażenie sprawiają również te wyniki Rozdziału 2, które nie weszły w skład artykułu wspólnego z promotorem. Mam tu na myśli Podrozdziały 2.3 i 2.4 dotyczące odpowiednio zbiorów pierwszej kategorii w obrębie prostych zbiorów doskonałych oraz zbiorów małych w sensie Bartoszyńskiego dla miary μ_P. W końcowym Podrozdziale 2.5, podobnie jak wcześniej dla klasy $P\mathcal{N}$, również dla klasy tranzytywnej $P\mathcal{N}'$ część wyników uzyskano w ZFC, a inne mają wersję niesprzecznościową. Pewne pytania pozostawiono bez odpowiedzi. Cały Rozdział 2 jest spójny tematycznie. Zaprezentowano tu różnorodność pomysłów i technik dowodowych, dobrą orientację w literaturze i umiejętność korzystania z jej wzorców.

Rozdział 3 poświęcony jest specjalnym uogólnieniom klasycznego twierdzenia Jegorova z teorii miary. Główny pomysł wywodzący się z nieopublikowanego preprintu Tomasza Weissa, został podjęty później przez Pincirolego i Repickiego. Otóż można pytać, czy teza twierdzenia Jegorova zachodzi bez założenia mierzalności funkcji pochodzących z rozważanego ciągu. Okazuje się, że tak jest, gdy założyć $non(\mathcal{N}) < \mathfrak{b}$ oraz że tak nie jest, gdy założyć $non(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$ oraz istnienie $\mathfrak{c}$-zbioru Łuzina. Każde z tych założeń może być zrealizowane w odpowiednich modelach ZFC. Autor rozprawy poszedł w tych badaniach dalej. Stosując podobny pomysł, uzyskał on Twierdzenia 3.2 i 3.3 odpowiadające powyższym dwóm sytuacjom, gdy zbieżność ciągu funkcji w tezie, odpowiadająca zbieżności jednostajnej, ma abstrakcyjną postać, natomiast w założeniu umieszczono abstrakcyjny operator o, którego własności związane z porządkiem w ω^ω oraz danym typem zbieżności, dają pożądany efekt. Twierdzenia 3.2 i 3.3 są wielokrotnie stosowane w dalszych częściach Rozdziału 3 w przypadku różnych rodzajów zbieżności ciągów funkcyjnych rozważanych przez innych autorów, którzy proponowali nowe warianty twierdzenia Jegorova. We wszystkich modyfikacjach tych wariantów zaprezentowanych w rozprawie rezygnuje się z mierzalności funkcji oraz stosuje się odpowiednie założenia teoriomnogościowe. Za każdym razem kluczową trudność stanowi zdefiniowanie stosownego operatora o i sprawdzenie, czy przysługują mu żądane własności. W ostatniej części Rozdziału 3 autor rozprawy nawiązuje do preprintu Repickiego z 2017 r., gdzie zaproponowano kolejne warianty uogólnień twierdzenia Jegorova.

Rozdziały 4 i 5 dotyczą specjalnych podzbiorów uogólnionej przestrzeni Cantora 2^κ. O liczbie κ zakłada się, że jest nieprzeliczalną regularną liczbą kardynalną. W uogólnionej przestrzeni Cantora rozważana jest tzw. ograniczona topologia, co pomaga "przenosić" pewne znane pojęcia i ich własności ze zwykłej przestrzeni Cantora na 2^κ. Te analogie nie są bynajmniej automatyczne, wymagają nieraz dodatkowych założeń i odpowiednich modyfikacji. Dobrze postrzegam tę tematykę badań – w takim ujęciu została ona rozwinięta całkiem niedawno, pierwsze wyniki należą do Halko (1996 r.), potem tymi problemami zainteresowali się m.in. Friedman i Shalah. W rozdziale 4 autor zajął się odpowiednikami "klasycznych" zbiorów małych w przestrzeni 2^κ takich jak: zbiory Łuzina, silnej miary zero, zbiory skoncentrowane, doskonale pierwszej kategorii, σ-zbiory oraz Q-zbiory. Wzorce dla zaproponowanych pojęć i twierdzeń czerpane są z pracy Halko, z rozdziału A. Millera z 1984 r. oraz z monografii Bukovskiego z 2011 r. Uogólnienia są trafne i naturalne, choć np. zbiory silnej miary zero tracą związek z jakąkolwiek miarą, a zbiory porowate tracą tradycyjną zależność od metryki, bo w przyjętej definicji żadna metryka nie występuje. Na końcu Rozdziału 4 badane są właściwości selekcji pokryć dla 2^κ, w tym odpowiedniki γ-zbiorów oraz odpowiedniki własności Hurewicza, Mengera i Rothbergera. Ta tematyka jest ważna z punktu widzenia ostatnich tendencji badawczych w topologii.

W Rozdziale 5 autor zajmuje się bardziej wysublimowanymi klasami zbiorów małych w 2^κ. Są wśród nich interesujące X-zbiory wywodzące się od Halko. Badane są też odpowiedniki zbiorów addytywnie pierwszej kategorii, zbiorów zerowych Ramsey'a oraz T'-zbiorów. Ich pierwowzory znajdują się w pracach Bartoszyńskiego i Judaha oraz Nowika i Weissa. Na koniec obiektami badań są odpowiedniki s_0-zbiorów Marczewskiego dla zbiorów doskonałych typu Silvera, Lavera i Millera w 2^κ. Autor stosuje metody dowodowe bardziej zaawansowane w porównaniu do tych z Rozdziału 4. Pojawiają się specjalne założenia teoriomnogościowe takie jak zmodyfikowana zasada karo i założenie o słabej lub silnej nieosiągalności liczby κ.

W Rozdziale 6 autor rozprawy bada κ-zbieżność punktową, jednostajną i quasi-normalną κ-ciągów funkcji działających z 2^κ do 2^κ. Następnie z powodzeniem "przenosi" pojęcia i rezultaty pochodzące od Bukovskiego i dotyczące quasi-normalnej zbieżności zwykłych ciągów funkcyjnych oraz odpowiednich specjalnych podzbiorów przestrzeni Cantora na przypadek długich ciągów funkcyjnych oraz podzbiorów uogólnionej przestrzeni Cantora. Ciekawe wydają się ciągowe własności selekcyjne podążające za bardziej klasycznymi własnościami tego typu badanymi wcześniej przez Bukovskiego. Autor rozprawy nie uzyskał na razie powiązań z pokryciowymi własnościami selekcyjnymi, które występują w klasycznym przypadku i dobrze motywują ten nurt badawczy.

Rozdziały 7 i 8 rozszerzają dodatkowo zakres badań autora rozprawy wokół uogólnionej przestrzeni Cantora 2^κ. Dotyczą one odpowiednio różnych wersji zbieżności ideałowej w 2^κ oraz odpowiedników twierdzenia Jegorova.

Omawiana praca doktorska ma charakter monograficzny. Obszerny Rozdział 1 poświęcony preliminariom zawiera na samym początku podstawowe i ogólnie znane pojęcia i własności miary i kategorii Baire'a na prostej, a także podstawowe pojęcia teorii mnogości, poczynając od liczb porządkowych i kardynalnych. Towarzyszy temu krótki rys historyczny i odwołania do literatury. Kolejne części Rozdziału 1 stanowią wprowadzenie do bardziej zaawansowanych zagadnień rozpatrywanych w zasadniczej części rozprawy. Trzeba przyznać, że redakcja rozprawy jest staranna i dobrze przemyślana. Usterki drukarskie są bardzo nieliczne. Z obowiązku wypiszę te, które zauważyłem: na str. 3^3, 6_{17}, 10^{13}, 11_4 załączonego autoreferatu w języku polskim oraz na str. 40_{10}, 68_2, 94_2 w rozprawie doktorskiej.

Autor wykazał się umiejętnością formalizacji pojęć i zręcznością zapisu. Nieraz przydałoby się więcej komentarzy (np. więcej informacji w dowodzie Proposition 2.5 oraz uzasadnienie, co pokazuje Proposition 2.9). Oznaczenia w pracy są dobrze dobrane i konsekwentnie stosowane. Nawet nie bardzo przeszkadza brak skorowidzu oraz indeksu używanych symboli. W kilku przypadkach czytelnik może mieć jednak kłopot. Litera Q o różnym kroju czcionki i z różnymi indeksami pojawia się wielokrotnie. Na str. 21 wprowadzono oznaczenia podzbiorów $\mathbf{Q}_1$ i $\mathbf{Q}_2$ przestrzeni Cantora, zaś zbiór $\mathbf{Q}$ został zdefiniowany na str. 39 w przestrzeni 2^κ. Jest jeszcze podzbiór Q prostej zdefiniowany na str. 24. W związku z tym w dowodzie Twierdzenia 2.12 pojawia się z początku problem z ustaleniem, w jakiej przestrzeni są wartości funkcji ϕ, czym jest zbiór $\mathbf{Q}$ i jak należy traktować element ∞. Inna uwaga redakcyjna: zwrot "constant under homeomorphisms" na str. 50_{3-4} wydaje się niejasny. Na str. 76^2 nie wiadomo, na jakie prawo 0-1 autor się powołuje. Szkoda, że zabrakło bardziej szczegółowych odwołań do odpowiednich faktów zamieszczonych w książkach. Na przykład odsyłacz do książki Bukovskiego w Podrozdziale 4.7 dotyczy ćwiczenia. Dodatkowo przydałby się komentarz w tym podrozdziale wyjaśniający, dlaczego dla $\kappa = \omega$ wracamy do tradycyjnego pojęcia porowatości. (W definicji $por_\kappa(x, A)$ pojawia się niezręczność, gdyż symbol γ został użyty w podwójnej roli.) W Podrozdziale 8.3 autor dwukrotnie powołuje się na Proposition 8.2, podczas gdy powinien powołać się na Wniosek 8.2.

Bez watpienia Doktorant z pomocą promotora wykonał solidną pracę, przeglądając i analizując liczne źródła bibliograficzne i porządkując zgromadzoną tam wiedzę. Dobór pozycji bibliograficznych jest ciekawy i trafny. W tematyce ideałów na ω nie uwzględniono ważnej monografii I. Faraha, wydrukowanej w Mem. Amer. Math. Soc. **148** (2000). U dołu str. 33 definiuje się ideały przeliczalnie generowane. Z książki Faraha (Proposition

1.2.8) wynika, że istnieją dwa takie ideały z dokładnością do izomorfizmu. Analogiczna klasa jest rozważana w Podrozdziale 7.1.1 omawianej rozprawy, gdy ω zastąpimy przez liczbę κ. Warto zastanowić się, czy można łatwo scharakteryzować κ-dopuszczalne ideały należące do tej klasy.

Najwyżej oceniam wyniki uzyskane w Rozdziale 2, a także w Rozdziałach 4–5 i w Rozdziale 3. Ważnym osiągnięciem Rozdziału 2 jest pomysł dwóch nowych klas zbiorów, których brakowało w diagramie po stronie miary, oraz wykazanie kilku ciekawych i trudnych własności. Pewne istotne pytania pozostają nadal otwarte. Rezultaty Rozdziałów 4 i 5 dobrze wpisują się w rozwojową tematykę, dotyczącą struktury podzbiorów uogólnionej przestrzeni Cantora. Ważne własności tej przestrzeni wywodzą się od takich autorów jak Sikorski, Hung i Negrepontis. Kolejne prace napisali m.in. Halko i Shelah oraz Friedman i Laguzzi. Pozytywne refleksje nasuwają się w stosunku do Rozdziału 6, choć Pytania 6.24 i 6.25 sugerują, że prowadzone tu badania wymagają dokończenia. W moim odczuciu studiowanie specjalnych rodzajów zbieżności w przestrzeni 2^κ nie ma na razie zbyt mocnej motywacji, a liczba definicji (np. w Podrozdziale 7.1.2) wydaje się zbyt przytłaczająca w stosunku do wagi udowodnionych twierdzeń. Pewne wątpliwości budzi włączenie krótkiego Rozdziału 8 do rozprawy. Zdefiniowano tu nowe abstrakcyjne pojęcie κ-proto-miary, a dalej podano jego zastosowania nawiązujące do zbiorów małych oraz twierdzenia Jegorova w aspekcie κ-zbieżności i κ-zbieżności ideałowej. Ewentualne dalsze badania pokażą, czy zaproponowane pojęcie będzie użyteczne w innych sytuacjach.

Wśród wyników pracy znajdują się twierdzenia (theorems) i stwierdzenia (propositions). Te pierwsze mają większe znaczenie i zwykle trudniejsze dowody. Te drugie są prostsze, a ich dowody są przeważnie wzorowane na pomysłach innych autorów. Należy docenić zarówno wartość głównych twierdzeń jak i wykreowanie uogólnionych pojęć i ich własności w postaci stwierdzeń, których jest dużo więcej niż twierdzeń.

Podsumowując, stwierdzam, że Doktorant rozwiązał w swojej rozprawie serię nietrywialnych problemów naukowych. Wykazał się przy tym odpowiednią wiedzą, samodzielnością i znajomością różnych, często zaawansowanych, technik kombinatorycznych i teoriomnogościowych. Do walorów rozprawy należą: szeroki zakres badań, znaczna ilość nowych interesujących twierdzeń oraz staranna redakcja. Uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

M. Balcerzak