

dr hab. Adam Nowak  
Instytut Matematyczny  
Polska Akademia Nauk

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Michała Brzozowskiego**  
pod tytułem  
*Sharp weighted inequalities for martingales*  
(*Ważone nierówności martyngałowe*)

**Informacje wstępne**

Rozprawa doktorska mgra Michała Brzozowskiego liczy 85 stron i jest napisana w języku angielskim. Dysertacji towarzyszy zwięzły autoreferat opisujący wyniki rozprawy, ich motywację i tło literaturowe. Autoreferat został przygotowany w dwóch wersjach językowych: polskiej i angielskiej.

Rozprawa podzielona jest na 5 rozdziałów, z których pierwszy ma charakter wstępny. Kolejne Rozdziały 2–5 zawierają rezultaty otrzymane przez doktoranta i są oparte, odpowiednio, na następujących pracach matematycznych.

- [P1] R. Bañuelos, M. Brzozowski, A. Osękowski, *Burkholder's function and a weighted  $L^2$  bound for stochastic integrals*, Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020), 5013–5028.
- [P2] M. Brzozowski, A. Osękowski, praca w przygotowaniu.
- [P3] M. Brzozowski, A. Osękowski, *Sharp weighted weak type  $(\infty, \infty)$  inequality for differentially subordinate martingales*, Statist. Probab. Lett. 155 (2019), 108561.
- [P4] M. Brzozowski, A. Osękowski, *Weighted maximal inequalities for martingale transforms*, Probab. Math. Statist. (24 str., w druku, praca dostępna w wersji online first).

Wszystkie te prace są wspólne, w szczególności w każdej jako współautor występuje promotor. Wkład doktoranta w powstanie prac [P1–P4] nie jest recenzentowi znany, należy jednak w dobrej wierze przyjąć, iż w każdym przypadku udział mgra Brzozowskiego był znaczący.

**Zarys tematyki**

Tematyka rozprawy dotyczy nierówności typu Burkholdera dla transformat martyngałowych. Ten krąg zagadnień ma swoją genezę w klasycznych wynikach analizy harmonicznej i geometrii przestrzeni Banacha, których korzenie sięgają lat trzydziestych ubiegłego wieku. W latach sześćdziesiątych Burkholder zauważył, że język i środowisko probabilistyczne stanowią bardzo dobre środki do wyrażenia nierówności znanych uprzednio w formie analitycznej, a co jeszcze bardziej istotne, do znajdowania uogólnień czy wzmocnień tych wyników; w szczególności, do otrzymywania optymalnych stałych w przedmiotowych nierównościach. Z kolei rezultaty uzyskane w ten sposób, na gruncie probabilistycznym, mają efektywne przełożenie na zastosowania w analizie.

Obecnie znane są szerokie klasy nierówności dla semimartyngałów i ich transformat, które były badane przez Burkholdera i jego współpracowników w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku, a także bardzo intensywnie przez Osękowskiego w ostatniej dekadzie. Fundamentalnym narzędziem w tych studiach jest elegancka, a zarazem bardzo skuteczna metoda wynaleziona przez Burkholdera. Z grubsza mówiąc, polega ona na wnioskowaniu pożądanej nierówności z istnienia pewnej specjalnej funkcji (tzw. *funkcji Bellmana/Burkholdera*) spełniającej pewne warunki rozmiaru i wklęsłości. Technika ta,

zwna czasami *metodą funkcji Bellmana*, wywodzi się z prac Bellmana z lat pięćdziesiątych dotyczących optymalnej kontroli. Główną trudnością i jednocześnie kluczowym krokiem w jej stosowaniu jest znalezienie, a właściwie *odkrycie* (to słowo wydaje się tu najbardziej adekwatne), potrzebnej funkcji Bellmana, zasadniczo poprzez wskazanie jawnej (i na ogół skomplikowanej) formuły. W tym miejscu należy podkreślić, że funkcje Bellmana mają głębokie związki z innymi obszarami matematyki, a istota ich jawnej znajomości sięga daleko poza teorię martyngałów.

### Opis głównych wyników

Nierówności typu Burkholdera dla transformat martyngałowych są aktualnie dobrze zbadanym i zrozumianym obszarem, czego jednakowoż nie można powiedzieć o ich ważonych odpowiednikach/uogólnieniach. Nierówności ważone odgrywają istotną rolę w analizie i z tej perspektywy były szeroko badane począwszy od pionierskich prac Muckenhoupta z początku lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku. Ważnym aspektem (m.in. z punktu widzenia zastosowań) nierówności z wagą jest wyznaczenie optymalnej zależności od tzw. *charakterystyki wagi*. Tego typu wyniki zostały zainicjowane pracą Buckley'a z początku lat dziewięćdziesiątych. Cała ta teoria ma swoją martyngałową interpretację.

Celem rozprawy doktorskiej mgra Brzozowskiego jest udowodnienie ważonych odpowiedników kilku klasycznych (bezwagowych) nierówności typu Burkholdera, z podaniem w każdym przypadku *optymalnej* zależności stałych multiplikatywnych w tych nierównościach od charakterystyki wagi. Dodatkowym celem pośrednim jest zastosowanie metody funkcji Bellmana, co jest motywowane m.in. potencjalną użytecznością znalezionych funkcji w badaniu zagadnień pokrewnych, czy nawet w innych obszarach matematyki.

W Rozdziale 2 otrzymuje się ważoną nierówność mocnego typu  $(p, p)$ ,  $1 < p < \infty$ , dla transformat martyngałowych, a także mocniejszą wersję maksymalną tego oszacowania. W tym pierwszym przypadku nowatorskim wkładem jest podanie prostszego dowodu znanego minimalnie wcześniej<sup>‡</sup> wyniku Domelevo-Petermichl (jeszcze wcześniejsze wyniki w tym duchu uzyskiwali m.in. Wittwer (2000), Thiele, Treil i Volberg (2015) oraz Lacey (2017)), z bardziej bezpośrednim zastosowaniem metody i istotnie prostszą postacią funkcji Bellmana. Natomiast oszacowanie maksymalne jest wkładem oryginalnym, który notabene został odtworzony chwilę później przez konkurencję Domelevo-Petermichl przy pomocy innych metod.

Rozdział 3 poświęcony jest ważonym oszacowaniom typu Burkholdera słabego typu  $(p, p)$ ,  $1 < p < \infty$ , dla transformat martyngałowych. Bezwagowe prototypy były badane wcześniej m.in. przez Burkholdera (1984), Wanga (1995) i Suh (2005). Kontynuacją Rozdziału 3 w sensie dopełnienia wyników jest Rozdział 4, gdzie uzyskuje się odpowiednik rezultatu dla przypadku brzegowego  $p = \infty$ . Tutaj bezwagowy prototyp był niedawno uzyskany przez Osękowskiego (2014). W podobnym sensie Rozdział 5 jest uzupełnieniem/dopełnieniem Rozdziału 2 o substytut wyniku i stowarzyszoną analizę dla przypadku brzegowego  $p = 1$ . Jest to zarazem istotne wzmocnienie świeżego, aczkolwiek dużo mniej ogólnego wyniku Osękowskiego (2018). Bezwagowy prototyp pochodzi tutaj zasadniczo od Burkholdera (1994); dalsze badania nad nim były prowadzone przez Osękowskiego (2008–2011). Rezultaty Rozdziałów 3–5 są oryginalne.

### Ocena

Dysertacja mgra Michała Brzozowskiego ma zdecydowanie charakter pracy badawczej zawierającej wyniki oryginalne i wartościowe. Są one dobrze umotywowane, w szczególności solidnie umocowane w istniejącej literaturze, ponadto w pewnych aspektach optymalne, tworzą spójną całość oraz wpisują się w tematykę badań podejmowanych wcześniej i aktualnie w wielu ośrodkach naukowych. Większość rezultatów rozprawy została już opublikowana w co najmniej przyzwoitych czasopismach matematycznych.

<sup>‡</sup> Można domniemywać, iż zespoły Domelevo-Petermichl i Bañuelos-Brzozowski-Osękowski pracowały nad wynikiem równoległe i niezależnie.

Rozumowania prowadzące do głównych wyników mają charakter techniczny, czego dobrym przykładem jest kulminujący w tym zakresie Rozdział 3. Centralną rzeczą intelektualną/koncepcyjną rozprawy jest odkrycie funkcji specjalnych (Bellmana) pozwalających uzyskać żądane nierówności. Sprawdzenie, że funkcje te mają konieczne własności jest z kolei głównym wkładem operacyjnym dysertacji. W rozprawie funkcje Bellmana mają 4 i więcej zmiennych i są zadane złożonymi wzorami przy pomocy wielu funkcji pomocniczych, w dodatku wzory te są różne na podobszarach dziedzin funkcji. Sprawdzenie, że tak zdefiniowane funkcje mają własności wymagane w metodzie funkcji Bellmana (chodzi tu głównie o najbardziej kłopotliwą własność wklęsłości) jest technicznie trudne i bardzo pracochłonne/żmudne, pomimo teoretycznej elementarności całego zadania. Fakt ten wyklucza niejako strategię ad hoc polegającą na seryjnym zgadywaniu i testowaniu wielu możliwości.

Odkrycie funkcji Bellmana pojawiających się w rozprawie jest rzeczą zaiste *spektakularną*, wymagającą niewątpliwie ogromnej, chciałoby się powiedzieć wręcz ezoterycznej, intuicji matematycznej. Procesy poszukiwań są opisane poglądowo w rozprawie, lecz nieco mgliście: pojawiają się określenia *zgadywanie*, *eksperymentowanie*, *modyfikowanie*. Jednak w gruncie rzeczy cała procedura przypomina proces myślowy i podświadomie stosowane heurystyki, które trudno sformalizować i opisać. Należy w tym miejscu podkreślić następujący aspekt: wspomniane powyżej *eksperymentowanie* wymagało przypuszczalnie wielkiego nakładu pracy i mnóstwa obliczeń przy zwiedzaniu „ślepych uliczek” poprzedzającym znalezienie tej właściwej. Jest to wkład ukryty dysertacji, który był wypracowany, lecz nie został jawnie ujęty w końcowym opracowaniu. Stowarzyszonym aspektem pozamerytorycznym, nie mniej godnym podziwu, jest wiara doktoranta i promotora w ostateczne znalezienie potrzebnych funkcji w założonym czasie; przy tym stopniu złożoności prace równie dobrze mogłyby trwać latami.

Pod względem redakcyjnym i strukturalnym dysertacja prezentuje się bardzo dobrze. Rezultaty formułowane są przejrzysto a dowody prowadzone z należytą dbałością o detale. Niewątpliwie wartościową częścią jest rozdział wstępny wprowadzający czytelnika w tematykę rozprawy i naświetlający jej metody i osiągnięcia. Każdy następny rozdział omawia również tło historyczne, literaturowe, oraz motywację do rezultatów w nim zawartych. Cenne są nieformalne opisy procesów dedukcji prowadzących do odkrycia właściwych funkcji Bellmana. Recenzent nie znalazł błędów czy uchybień matematycznych, jedynie niewielką liczbę drobnych usterek językowych/misprintów, które w żaden sposób nie rzutują negatywnie na całościowy odbiór rozprawy. Ogólnie rzecz biorąc, zarówno poprawność językowa jak i redakcja dysertacji stoją na wysokim poziomie. Znamionuje to wysoką kulturę matematyczną doktoranta.

### Podsumowanie

Rozprawa formułuje i kompletnie rozwiązuje oryginalne i ważne problemy naukowe, tym samym wnosząc istotny wkład do rozwoju teorii nierówności martyngałowych. Badane zagadnienia wymagają zaawansowanej wiedzy, wysoce złożonej analizy i pokonania niebagatelnych trudności. Doktorant wykazuje dogłębne opanowanie metody funkcji Bellmana, jak również szeroką znajomość teorii nierówności martyngałowych. Otrzymane rezultaty są pełne, tworzą spójną tematycznie całość, i są optymalne. Redakcja i styl rozprawy są zasadniczo bez zarzutu, podobnie jak poprawność uzyskanych wyników. Brak znajomości natury wkładu doktoranta do prac [P1–P4] powoduje pewien dyskomfort w ostatecznej ewaluacji. Niemniej jednak moja całościowa ocena dysertacji jest jednoznacznie pozytywna: nie mam wątpliwości iż jest to solidna rozprawa doktorska.

**Podsumowując, uważam, że recenzowana rozprawa spełnia wszelkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim w dyscyplinie Matematyka.**

