Wrocław, 28 kwietnia 2019r.

prof. dr hab. Dariusz Buraczewski
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Wrocławski

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr Marty Strzeleckiej
pt. *Estimates for moments of random vectors*

Przedstawiona rozprawa doktorska, zgodnie z tytułem, dotyczy szacowań norm pewnych naturalnych klas wektorów losowych. Jest to centralna część probabilistyki i pomimo wielu znanych klasycznych już wyników, jest dynamicznie rozwijana i zawiera szereg ważnych wciąż nierozwiązanych problemów. Jednym z kierunków badań jest porównanie mocnych i słabych momentów norm wektorów losowych.

Rozprawa, oprócz wstępu, składa się z trzech części, których wyniki oparte są na pracach

(1) R. Latała and M. Strzelecka, *Weak and strong moments of r-norms of log-concave vectors*, Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016), no. 8, 3597–3608.

(2) R. Latała and M. Strzelecka, *Comparison of weak and strong moments for vectors with independent coordinates*, Mathematika 64 (2018), no. 1, 211–229.

(3) M. Strzelecka, M. Strzelecki, T. Tkocz, *On the convex infimum convolution inequality with optimal cost function*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 14 (2017), no. 2, 903–915.

(4) M. Strzelecka, *Estimates for norms of log-concave matrices*, preprint (2019+).

Szczegółowe omówienie wyników. Rozdział drugi poświęcony jest uogólnieniom nierówności Paourisa. Oryginalny wynik, pochodzący z 2006 roku, mówi, że dla losowego wektora $X \in \mathbb{R}^n$ o rozkładzie log-wklęsłym jego mocne i słabe momenty norm są porównywalne w sensie poniższej nierówności:

$$(\mathbb{E}\|X\|_2^p)^{1/p} \le C\Big((\mathbb{E}\|X\|_2^2)^{1/2} + \sup_{\|t\|_2\le 1}\Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^n t_iX_i\Big|^p\Big)^{1/p}\Big), \qquad p \ge 1.$$

Naturalnym pytaniem jest czy powyższa nierówność jest również prawdziwa, gdy norma euklidesowa zostanie zastąpiona przez inną normę w skończenie wymiarowej przestrzeni. Ponadto interesujące byłoby wyjście poza klasę losowych wektorów log-wklęsłych. Do tej pory znane są jedynie częściowe wyniki. Jednym z kluczowych problemów jest również otrzymanie szacowań niezależnych od wymiaru, bądź też ze stałą, której wzrost może być dobrze kontrolowany.

Pierwszy główny wynik pracy, przedstawiony jako Twierdzenie 2.3, pochodzi ze wspólnej pracy z R. Latałą (1) i zawiera uogólnienie nierówności Paourisa do losowych wektorów log-wklęsłych o wartościach w unormowanej przestrzeni $(F, \|\cdot\|)$, która może być włożona izometrycznie w ℓ^r:

$$(\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p} \leq Cr\Big(\mathbb{E}\|X\| + \sup_{\phi\in F^*, \|\phi\|_*\leq 1} (\mathbb{E}|\phi(X)|^p)^{1/p}\Big), \qquad p \geq 1.$$

Dowód tej nierówności zawarty jest na kilkunastu stronach i jest chyba najtrudniejszą częścią rozprawy. Schemat dowodu jest podobny do argumentów zawartych we wcześniejszych pracach R. Latały, niemniej jednak specyfika modelu i przyjętych założeń wymaga przeprowadzenia szeregu dalece nietrywialnych rozumowań. Kluczowa w dowodzie jest Propozycja 2.16 zawierająca oszacowanie r-tych momentów obciętych do mniejszych zbiorów, po której następuje eleganckie rozumowanie kombinatoryczne.

Kolejnym ważnym wynikiem jest Twierdzenie 2.9, pochodzące z pracy (2). Zawiera ono szacowanie wyrażeń powiązanych z normą postaci $\sup_{t\in T}\left|\sum_{i=1}^n t_iX_i\right|$ dla T będącego niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Dla niezależnych zmiennych losowych o średniej 0 i przy założeniu warunku regularnego wzrostu momentów pokazano nierówność typu Paourisa

$$\Big(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\Big|\sum_{i=1}^n t_iX_i\Big|^p\Big)^{1/p} \leq C\Big(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\Big|\sum_{i=1}^n t_iX_i\Big| + \sup_{t\in T}\Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^n t_iX_i\Big|^p\Big)^{1/p}\Big),$$

dla $p \geq 1$ oraz $T \subset \mathbb{R}^n$. Co więcej, dla niezależnych zmiennych losowych pokazana jest optymalność założeń (Twierdzenie 2.10). Warto zauważyć, że wynik ten zachodzi dla dowolnych zmiennych losowych, a więc wychodzi poza ramy losowych log-wklęsłych wektorów, uogólniając w ten sposób wcześniej znane wyniki dla zmiennych gaussowskich, Bernoulliego, czy wreszcie symetrycznych. Dowód polega na precyzyjnej analizie, w której symetria odgrywa istotną rolę. Dlatego też najpierw dowodzi się powyższej nierówności dla symetrycznych zmiennych losowych oraz pewnej klasy symetrycznych zbiorów T, a następnie w kolejnych krokach przy pomocy delikatnych rozumowań założenia dotyczące symetrii są redukowane do ogólnego przypadku.

Rozdział 3 oparty jest na współautorskiej pracy (3) i dotyczy on wypukłych nierówności dla tzw. splotu infimum. Jest to zagadnienie pochodzące z klasycznej już pracy Maurey'a i jego celem jest opis par (X, ϕ), gdzie ϕ jest funkcją kosztu, dla których spełniona jest nierówność

$$\mathbb{E}e^{f\Box\phi(X)}\mathbb{E}e^{-f(X)} \leq 1,$$

dla dowolnej funkcji testowej f, a splot infimum jest zdefiniowany następującą formułą $f\Box\phi(x) = \inf_y\{f(y)+\phi(x-y)\}$. Twierdzenie 3.1 uogólnia wcześniejsze wyniki i pokazuje, że powyższa nierówność jest spełniona dla dowolnej symetrycznej zmiennej losowej X o log-wklęsłych ogonach oraz odpowiedniej funkcji ϕ (zdefiniowanej jako przeskalowana transformata Legendre'a funkcji generującej momenty zmiennej losowej X). Jako wniosek przedstawione są nierówności porównujące słabe i mocne normy. Ponadto przeliczony jest przykład, wskazujący iż przyjęte założenia są bliskie optymalnym. Dowód twierdzenia korzysta częściowo z charakteryzacji otrzymanej w pracy [9].

W ostatnim rozdziale opisane zostały wyniki pochodzące z samodzielnej pracy (4). Dotyczą one nierówności norm operatorowych macierzy losowych, a umotywowane są chęcią głębszego zrozumienia maksymalnej wartości własnej dużej macierzy losowej. W 2000 r. Seginer pokazał, że jeżeli elementy macierzy są iid, to wartość oczekiwana normy operatorowej ($\ell^2 \mapsto \ell^2$) jest porównywalna ze średnimi z maksymalnej długości kolumn i wierszy. Niedawno w pracy [11] otrzymano podobne oszacowania dla norm $\ell^p \mapsto \ell^q$ macierzy gaussowskich. Główny wynik przedstawiony w Twierdzeniu 4.1 opisuje analogiczną nierówność dla macierzy losowych, których kolumny są losowymi izotropowymi log-wklęsłymi wektorami o tym samym rozkładzie. Jest to wartościowy wynik pokazujący w szczególności, że założenie niezależności pojawiające się w poprzednich pracach może być istotnie osłabione. Schemat dowodu przypomina nieco argumenty zawarte w pracy [11], jednak kolejne elementy dowodu oparte na trudnych, samodzielnie przeprowadzonych rozumowaniach.

Podsumowanie. Rozprawa doktorska dotyczy trudnych i aktualnych zagadnień. Tematyka rozprawy porusza problemy, którymi zajmują się renomowani matematycy i biorąc pod uwagę ogromny wysiłek włożony w ostatnich latach w opis nierówności stochastycznych niezwykle ciężko znaleźć tu wolne pole do zagospodarowania. Tym bardziej należy docenić powyżej omówione wyniki i wkład pani Marty Strzeleckiej w badaną problematykę nierówności stochastycznych. Przedstawione w pracy rozumowania często prowadzą przez trudne i żmudne analityczne obliczenia. Jednak niejednokrotnie kolejne kroki wymagają błyskotliwych obserwacji. Powyżej opisane zostały jedynie główne wyniki. Praca zawiera jednak opis znacznie szerszego kontekstu i wiele dalszych wniosków, twierdzeń. Zostały zaprezentowane zarówno hipotezy, znane wyniki jak i kontrprzykłady pokazujące, że przedstawione wyniki są już bliskie optymalnym. Przedstawione dowody wymagają często niezwykle subtelnych rozumowań i choć niejednokrotnie są oparte na znanych już technikach dowodowych, to są w dużej mierze oryginalne.

Rozprawa składa się z czterech publikacji i choć wszystkie dotyczą nierówności stochastycznych, poruszają często dosyć odległe od siebie zagadnienia. Pozwala to na zaprezentowanie różnych problemów, rozmaitych technik, a przede wszystkim umożliwiło Autorce na wykazanie się rozległą wiedzą w badanej tematyce oraz umiejętnościami łączenia argumentów pochodzących z różnych działów matematyki, niezbędnymi w pracy naukowej.

Autorka włożyła wiele wysiłku w prezentację wyników i pracę czyta się dosyć dobrze pomimo natłoku notacji (często bardzo technicznej) i trudnych analitycznych rozumowań. Chwilami zdarzają się drobne błędy literowe (a nawet wiele takich błędów), czy też usterki redakcyjne (na str. 7 jest zbyt duże natężenie podobnych symboli i ciężko odróżnić np. $|Z|$ od $\|Z\|$; na str. 17 wektory Y_i nie są zdefiniowane; na str. 23 w l. 7-8, 2^j powinno być zastąpione przez 2^{j+1}; na str. 28 w l. 4 brakuje znaku sumy; na str. 47 w l.-5 powinno być 'increase' zamiast 'decrease'; na str. 50 nie rozumiem przejścia pomiędzy l.5-6, w sytuacji gdy $2\alpha e < 1$). Czytanie pracy niewątpliwie ułatwia dobrze napisany wstęp, który wprowadza w tematykę i prezentuje niezbędną notację.

Konkluzja.

Recenzowana rozprawa doktorska *Estimates for moments of random vectors* spełnia, a nawet znacznie przekracza, ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie pani Marty Strzeckiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

D Buraczewski