Tomasz Rychlik
Instytut Matematyczny PAN
Warszawa

Warszawa, 17 kwietnia 2019

Recenzja pracy doktorskiej mgr Marty Strzeleckiej
pt. *Estimates for moments of random vectors*

Rozprawa doktorska pani Marty Strzeleckiej poświęcona jest oszacowaniom wartości oczekiwanych potęg norm losowych wektorów skończenie wymiarowych oraz norm losowych operatorów liniowych przeksztacających takie wektory. Oszacowania p-tych momentów norm wektorów (tzw. silnych p-tych momentów) są wyrażane w terminach kombinacji pierwszych silnych momentów i p-tych słabych momentów, tzn. maksymalnych oczekiwanych p-tych norm funkcjonałów liniowych przekształcających losowe momenty. Oczekiwane normy losowych operatorów postaci iloczynu Hadamarda $X = A * Y$ z deterministyczną macierzą A i losową Y są wyrażane za pomocą mieszanki norm wierszy i kolumn macierzy A oraz oczekiwanej normy maksimum macierzy X.

Praca została napisana w języku angielskim, liczy 70 stron i zawiera 36 odnośników do literatury. Składa się z 4 rozdziałów, z których pierwszy na charakter wprowadzający, a pozostałe zawierają główne wyniki rozprawy. Zostały one napisane w bardzo zwięzłym stylu i mają podobną strukturę. Najpierw zostały sformułowane rezultaty i wynikające z nich wnioski. Opisano również ich znaczenie na tle innych osiągnięć w tej tematyce oraz uwagi dotyczące znaczenia poszczególnych założeń. Największą objętościowo część każdego z tych rozdziałów stanowiły dowody ich wyników. Rozdziały 2 i 3 są oparte na pracach [22] i [23] oraz odpowiednio [35]. Ich zawartość nieznacznie się różni od zawartości tych prac.

Rozdział 2 zawiera, moim zdaniem, najbardziej znaczące rezultaty pracy, które zostały uzyskane we współpracy z promotorem Rafałem Latałą. Pierwszy wynik stanowi częściowo pozytywną odpowiedź na hipotezę Latały, że istnieje wspólna stała C dla dowolnych wektorów X o wartościach w skończenie wymiarowej unormowanej przestrzeni liniowej $(F, ||\cdot||)$ o logarytmicznie wklęsłym rozkładzie i dla dowolnej liczby $p \geq 1$ spełniająca nierówność

$$(\mathbb{E}||X||^p)^{1/p} \leq C \left[\mathbb{E}||X|| + \sup_{\varphi \in F^*, ||\varphi||_* \leq 1} (\mathbb{E}|\varphi(X)|^p)^{1/p} \right]. \tag{1}$$

Rozkłady logarytmicznie wklęsłe są bardzo użytecznym i intuicyjnym uogólnieniem miar jednostajnych i gaussowskich. W podrozdziale 2.1 zostało zaprezentowane twierdzenie 2.5 potwierdzające hipotezę Latały w szczególnym przypadku norm typu l_r^n, $r \geq$

1, ze stałą $C_r = Cr$ liniowo zależną od parametru r i niezależną od wymiaru n wektora (teza została też sformułowana ogólniej dla przestrzeni izometrycznie zanurzalnych w l_r^n w twierdzeniu 2.3). Warto zaznaczyć, że kolejne oszacowania w pracy są też niezależne od wymiaru przestrzeni. Zasadniczy wynik pomocniczy zapisany w twierdzeniu 2.6 zawiera oszacowanie p-tych momentów r-tych norm ogonowych wartości $Y = (Y_i)_{i=1}^n = (X_i \mathbf{1}_{(t^2,+\infty)}(X_i^2/\mathbb{E}X_i^2))_{i=1}^n$ przez słabe p-te momenty X

$$\mathbb{E}||Y||_r^p \leq (Cr)^p \sup_{||t||_{r/(r-1)}\leq 1} \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n t_i X_i\right|^p$$

dla dostatecznie dużych t występujących w definicji Y. Dowód tej nierówności wymagał długiego ciągu pomysłowych oszacowań, po części wydzielonych w propozycji 2.16.

Drugi najważniejszy wynik rozdziału 2 był opublikowany w pracy [23]. Wskutek dodania istotnego założenia o niezależności współrzędnych X i zastąpienia logarytmicznej wklęsłości X regularną zmiennością centralnych momentów jego współrzędnych

$$\mathbb{E}|X_i - \mathbb{E}X_i|^{2p} \leq (\mathbb{E}|\alpha(X_i - \mathbb{E}X_i)|^p)^2 \tag{2}$$

dla pewnego $\alpha > 0$ wspólnego dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$ oraz $p \geq 2$ uzyskano oszacowanie

$$\left(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\left|\sum_{i=1}^n t_i X_i\right|^p\right)^{1/p} \leq C\left[\mathbb{E}\sup_{t\in T}\left|\sum_{i=1}^n t_i X_i\right| + \sup_{t\in T}\left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n t_i X_i\right|^p\right)^{1/p}\right] \tag{3}$$

dla dowolnego zbioru $T \subset \mathbb{R}^n$ i stałej C zależnej od α (w przypadku T będącego kulą jednostkową wzór ten jest równoważny wzorowi (1)). W pracy pokazano również, że w przypadku niezależnych X_i o jednakowym rozkładzie dostateczny warunek (2) jest również konieczny do uzyskania (3). Wynik ten wspiera intuicję, że (2) jest bliska konieczności zachodzenia (3) także w wielu przypadkach współrzędnych o różnych rozkładach, choć dopuszczenie całkowitej dowolności tych rozkładów pozwoliłoby pewnie na skonstruowanie praktycznie dziwacznych lecz formalnie możliwych kontrprzykładów. Spektakularnym wnioskiem oszacowania (3) jest możliwość oszacowania momentów norm wektorów przez momenty niższego rzędu

$$(\mathbb{E}||X||^p)^{1/p} \leq C(\alpha)\left(\frac{p}{q}\right)^{\max\{1/2, \log_2\alpha\}}(\mathbb{E}||X||^q)^{1/q}$$

dla $2 \leq q \leq p$, wynikająca z wniosku 2.12. Dowód nierówności (3) jest również bardzo rozbudowany, w kolejnych etapach są rozważane coraz bardziej złożone zbiory T: bezwarunkowe, symetryczne i wreszcie dowolne. Również wnioski wynikające z (3) i opisane w podrozdziale 2.2 były bardzo nietrywialne i ich uzasadnienie wymagało złożonych argumentów.

Rozdział 3 zawiera bardziej zaawansowane wyniki, ale ja najpierw wspomnę wynikającą z nich nierówność w duchu poprzedniego rozdziału: dla symetrycznych wektorów o niezależnych współrzędnych z logarytmicznie wklęsłymi ogonami zachodzi

$$(\mathbb{E}||X||^p)^{1/p} \leq \mathbb{E}||X|| + D \sup_{\varphi\in F^*,||\varphi||_*\leq 1} (\mathbb{E}|\varphi(X)|^p)^{1/p}$$

dla dowolnych norm na $\mathbb{R}^n$ i $p \geq 2$. Wynika ona z ogólniejszej nierówności

$$(\mathbb{E}\,|||X|| - \mathbb{E}||X|||^p)^{1/p} \leq C\alpha\beta \sup_{\varphi\in F^*,||\varphi||_*\leq 1} (\mathbb{E}|\varphi(X)|^p)^{1/p} \tag{4}$$

zachodzącej dla symetrycznych wektorów X z rosnącymi α-regularnie momentami i spełniających dla funkcji

$$\varphi(x) = \varphi_{\beta,X}(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{\beta}\langle x,y\rangle - \ln \mathbb{E}\exp(\langle y,X\rangle) \right\}$$

nierówność

$$\mathbb{E}\exp(\inf_{y\in\mathbb{R}^n}\{f(y)+\varphi(X-y)\})\,\mathbb{E}\exp(-f(X)) \leq 1 \tag{5}$$

dla każdej ograniczonej z dołu wypukłej funkcji f. Kluczem do tej ogólniejszej nierówności jest z kolei teza twierdzenia 3.1 głoszącego, że istnieje taki parametr β, że dla dowolnego symetrycznie rozłożonego wektora X z log-wklęsłymi ogonami funkcja $\varphi_{\beta,X}$ spełnia (5). W rozdziale 3 pokazano też przykład świadczący o tym, że warunek (5) nie może być zastąpiony słabszym i bardziej czytelnym warunkiem α-regularności momentów. Również dowody twierdzenia 3.1 i wynikającej z niego nierówności (4) są bardzo złożone i wymagają zaawansowanych narzędzi probabilistyki, analizy funkcjonalnej i biegłości rachunkowej.

Rozdział 4 jest poświęcony szacowaniu wartości oczekiwanych norm losowych liniowych operatorów z przestrzeni $l^m_{p/(p-1)}$ do l^n_q, $p,q \geq 2$, postaci $X = A * Y$, gdzie A jest macierzą deterministyczną, a $Y_i = [Y_{i1},\ldots,Y_{in}]^T$, $i = 1,\ldots,m$, są niezależnymi izotropowymi log-wklęsłymi wektorami o jednakowym rozkładzie. Są one postaci

$$\begin{aligned}\mathbb{E}||X||_{p/(p-1),q} &\leq C(p,q)\Big[\ln^{1/q} m \max_{1\leq i\leq m} ||[A_{i1},\ldots,A_{in}]^T||_p \\ &+ \max_{1\leq j\leq n} ||[A_{1j},\ldots,A_{nj}]^T||_q + \ln^{1/q+1} m \max_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \mathbb{E}|X_{ij}|\Big].\end{aligned} \tag{6}$$

Oszacowanie to jest słabsze od nierówności Guédona i współpracowników [11] uzyskanej wyłącznie dla macierzy gaussowskich jedynie o tyle, że wykładnik potęgi logarytmu przed ostatnim składnikiem w (6) jest o 1 większy niż w [11]. Schemat dowodu jest powieleniem argumentacji z [11] z tym, że narzędzia dla modelu gaussowskiego zostały zastąpione analogicznymi wynikami dla rozkładów logarytmicznie wklęsłych uzyskanymi w poprzednich rozdziałach. Godne uwagi jest też wykorzystanie (6) do oszacowania norm operatorów $X = R * A * Y$, gdzie Y_{ij} są standardowe normalne, a R_{ij} są niezależnymi od nich nieujemnymi log-wklęsłymi zmiennymi mieszającymi.

Rozprawa jest na bardzo wysokim poziomie matematycznym. Dotyczy klasycznych zagadnień probabilistycznych: niezależnych od wymiaru przestrzeni oszacowań momentów norm wielowymiarowych zmiennych losowych z bogatej klasy zmiennych logarytmicznie wklęsłych, wykorzystywanych też do szacowania zmienności ogonów ich rozkładów. Rozwiązuje przynajmniej częściowo fundamentalne problemy teorii prawdopodobieństwa. Na pewno rezultaty rozprawy zasługują na wyróżnienie. Nie mam jednak całkowitej pewności, że na wyróżnienie zasługuje też Autorka. Przyczyną tej wątpliwości jest fakt, że 3/4 wyników zostało uzyskane wspólnie z promotorem Rafałem Latałą, a także z Michałem Strzeleckim i Tomaszem Tkoczem. Nie wiadomo, jaki jest osobisty wkład Doktorantki w te osiągnięcia, a jaki jej współpracowników (procedura przewodu doktorskiego nie wymaga takich deklaracji). Myślę, że ta sprawa będzie dyskutowana i wyjaśniona na posiedzeniach komisji doktorskiej. Rozprawa została napisana fachowo i przejrzyście, poprawnie pod względem językowym. Mój drobny zarzut dotyczy faktu, że rozdziały 2 i 3 są niemal literalnie przepisane z prac [22], [23] i [35]. Wiadomo, że prace w czasopismach naukowych są głównie czytane przez wąską grupę specjalistów z danej dziedziny i zwięzłość stylu, a nawet pewne skróty myślowe są tam dopuszczalne, czy nawet zalecane. Takie wymagania nie dotyczą prac doktorskich, w których można i należy zamieścić więcej objaśnień i komentarzy.

W moim przekonaniu rozprawa Pani Marty Strzeleckiej jest wartościową pracą doktorską i dlatego wnioskuję o dopuszczenie jej Autorki do dalszych etapów postępowania doktorskiego. Zgłaszam też wniosek o wyróżnienie rozprawy z zastrzeżeniem zgłoszonym powyżej.

Tomasz Bojdecki