dr hab. Bartosz Walczak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków
walczak@tcs.uj.edu.pl

Kraków, 7 czerwca 2018 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Marcina Wrochny pt. „The topology of solution spaces of combinatorial problems"

Omówienie zawartości rozprawy

Tematem przewodnim rozprawy jest badanie homomorfizmów grafów za pomocą narzędzi pochodzących z topologii algebraicznej. *Homomorfizmem* grafu G w graf K nazywamy odwzorowanie zbioru wierzchołków grafu G w zbiór wierzchołków grafu K, takie że obrazem dowolnej krawędzi w grafie G przez to odwzorowanie jest krawędź w grafie K. Homomorfizm grafu G w n-wierzchołkowy graf pełny K_n jest to po prostu n-kolorowanie grafu G. Problem istnienia homomorfizmu $G \to K$ jest zatem naturalnym uogólnieniem klasycznego problemu kolorowania — jednego z najbardziej fundamentalnych problemów kombinatorycznej i algorytmicznej teorii grafów — a homomorfizm $G \to K$ nazywamy także *K-kolorowaniem* grafu G.

Wykorzystanie homomorfizmów do badania kolorowań grafów pozwala formułować pewne argumenty na wyższym poziomie abstrakcji, np. w języku teorii kategorii, co ułatwia wyszukanie analogicznych problemów wśród innych struktur matematycznych oraz przetłumaczenie narzędzi służących do badania tych struktur na język grafów i homomorfizmów. W szczególności tzw. metoda topologiczna, zapoczątkowana przez Lovásza w 1978 roku, pozwala badać homomorfizmy grafów za pomocą narzędzi pochodzących z topologii algebraicznej.

Odpowiedniość kombinatoryczno-topologiczna, którą wykorzystuje w swojej rozprawie mgr Marcin Wrochna, przypisuje grafowi G jego *kompleks pudełkowy* $\mathrm{Box}(G)$, który jest topologicznym kompleksem symplicjalnym wyposażonym w wolne działanie grupy $\mathbb{Z}_2$, w skrócie — *$\mathbb{Z}_2$-kompleksem*. Homomorfizm $G \to K$ tłumaczy się wówczas na odwzorowanie ciągłe $\mathrm{Box}(G) \to \mathrm{Box}(K)$ niezmiennicze ze względu na działanie grupy $\mathbb{Z}_2$, w skrócie — *$\mathbb{Z}_2$-odwzorowanie*. W języku teorii kategorii konstrukcja ta definiuje funktor prowadzący z kategorii grafów wraz z homomorfizmami do kategorii $\mathbb{Z}_2$-kompleksów wraz z $\mathbb{Z}_2$-odwzorowaniami. Co więcej, każdy $\mathbb{Z}_2$-kompleks jest równoważny (formalnie — $\mathbb{Z}_2$-homotopijnie równoważny) kompleksowi pudełkowemu pewnego grafu. Kompleks pudełkowy n-wierzchołkowego grafu pełnego K_n jest równoważny $(n-2)$-wymiarowej sferze $\mathcal{S}^{n-2}$, na której działanie grupy $\mathbb{Z}_2$ określone jest po prostu jako mnożenie przez -1. Oto przykładowe wykorzystanie metody topologicznej: jeżeli o grafie G potrafimy udowodnić, że jego kompleks pudełkowy $\mathrm{Box}(G)$ jest równoważny sferze $\mathcal{S}^{n-1}$, to graf G nie jest n-kolorowalny, gdyż nie istnieje $\mathbb{Z}_2$-odwzorowanie $\mathcal{S}^{n-1} \to \mathcal{S}^{n-2}$ (twierdzenie Borsuka-Ulama).

Rozprawa doktorska składa się z czterech rozdziałów. Rozdział I wprowadza czytelnika w tematykę rozprawy, definiuje podstawowe pojęcia dotyczące homomorfizmów grafów i odpowiadające im pojęcia topologii algebraicznej oraz streszcza zawartość dalszej części rozprawy. Rozdziały II–IV przedstawiają oryginalne wyniki autora. Każdy z tych rozdziałów został przeniesiony do rozprawy z osobnej publikacji autora, dzięki czemu rozdziały te są od siebie niezależne.

Badania przedstawione w rozprawie motywowane są tzw. hipotezą Hedetniemiego z 1966 roku o liczbie chromatycznej produktu dwóch grafów. *Produktem* $G \times H$ grafów G i H nazywamy graf,

BW

którego wierzchołkami są pary (g, h), takie że g jest wierzchołkiem grafu G, a h jest wierzchołkiem grafu H, oraz którego krawędzie mają postać $(g, h)(g', h')$, gdzie gg' jest krawędzią grafu G, a hh' jest krawędzią grafu H. Konstrukcja ta spełnia własność uniwersalną produktu w kategorii grafów, w szczególności istnieją homomorfizmy (rzutowania) $G \times H \to G$ i $G \times H \to H$. Wynika stąd, że jeżeli istnieje homomorfizm $G \to K$ lub $H \to K$, to istnieje homomorfizm $G \times H \to K$. Graf K nazywamy *multiplikatywnym*, jeżeli spełniony jest warunek odwrotny:

jeżeli istnieje homomorfizm $G \times H \to K$, to istnieje homomorfizm $G \to K$ lub $H \to K$.

Hipoteza Hedetniemiego mówi, że każdy graf pełny K_n jest multiplikatywny, czyli równoważnie — że produkt $G \times H$ jest n-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z grafów G i H jest n-kolorowalny. Hipoteza ta jest udowodniona dla $n \leqslant 3$ i pozostaje otwarta dla $n \geqslant 4$.

W swojej rozprawie doktorskiej mgr Marcin Wrochna wskazuje nowe klasy grafów multiplikatywnych. Jedynymi z dokładnością do homomorficznej równoważności znanymi wcześniej grafami multiplikatywnymi były grafy pełne K_n dla $n \leqslant 3$ oraz ogólniej tzw. kliki okrężne $K_{p/q}$ dla $p/q < 4$, których szczególnymi przypadkami są cykle nieparzystej długości. Doktorant dowodzi, że każdy *graf bezkwadratowy*, czyli graf, który nie zawiera cykli długości 4, jest multiplikatywny. Do tego celu definiuje pewne parametry cykli w grafach, które są kombinatorycznymi odpowiednikami typów homotopii pętli w kompleksach pudełkowych tych grafów i które nazywa *niezmiennikami*. Istotnie, są to niezmienniki ze względu na przekolorowania, czyli przekształcenia homomorfizmów grafów za pomocą lokalnych modyfikacji, które są kombinatorycznymi odpowiednikami $\mathbb{Z}_2$-homotopii $\mathbb{Z}_2$-odwzorowań między kompleksami pudełkowymi tych grafów. Dowód multiplikatywności polega na uproszczeniu homomorfizmu $G \times H \to K$ za pomocą przekolorowań do postaci, w której albo zależy on od tylko jednej współrzędnej produktu, co natychmiast daje żądany homomorfizm $G \to K$ lub $H \to K$, albo jego obrazem jest pojedynczy cykl w grafie K, co pozwala wywnioskować istnienie homomorfizmu $G \to K$ to $H \to K$ z multiplikatywności cykli. Wykorzystując podobną metodę, autor przedstawia również nowy dowód multiplikatywności klik okrężnych $K_{p/q}$ dla $p/q < 4$. Wyniki te zawarte są w rozdziale III — centralnej części rozprawy. Przedstawione w nim dowody są czysto kombinatoryczne i nie odwołują się bezpośrednio do narzędzi topologii algebraicznej. Zawartość rozdziału III została opublikowana jako samodzielna praca autora w czasopiśmie *Journal of Combinatorial Theory, Series B.*

W rozdziale II rozprawy autor zajmuje się przekolorowaniami z algorytmicznego punktu widzenia. W problemie *K-przekolorowania* dane są na wejściu graf G oraz jego K-kolorowania α i β; pytamy, czy istnieje ciąg K-kolorowań $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ grafu G, taki że $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_m = \beta$ oraz każde K-kolorowanie w tym ciągu powstaje z poprzedniego przez zmianę wartości przypisanej dokładnie jednemu wierzchołkowi grafu G. W problemie *najkrótszego K-przekolorowania* dodatkowo pytamy o najkrótszy taki ciąg $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$. Znane były wyniki mówiące, że problem K_n-przekolorowania jest NP-trudny dla $n \geqslant 4$, podczas gdy problem (najkrótszego) K_3-przekolorowania ma rozwiązanie wielomianowe. Doktorant w rozprawie uogólnia ten ostatni wynik, przedstawiając wielomianowy algorytm obliczania najkrótszego K-przekolorowania dla dowolnego bezkwadratowego grafu K (wielomianowy nawet wtedy, gdy K jest częścią wejścia, a nie parametrem problemu). Podstawowym wykorzystywanym tu narzędziem jest kombinatoryczny odpowiednik grupy podstawowej kompleksu pudełkowego $\mathrm{Box}(G)$, który w przypadku grafu bezkwadratowego jest po prostu grafem $G \times K_2$ rozumianym jako jednowymiarowy kompleks symplicjalny. Podobnie jednak jak w rozdziale III, dowody przedstawione w rozdziale II są czysto kombinatoryczne i nie korzystają bezpośrednio z topologicznych narzędzi. Zawartość rozdziału II została opublikowana na konferencji STACS 2015 jako samodzielna praca autora.

BW

Rozdział IV rozprawy dotyka już bezpośrednio związków między grafami i homomorfizmami a ich kompleksami pudełkowymi i $\mathbb{Z}_2$-odwzorowaniami. Przez analogię do grafów $\mathbb{Z}_2$-kompleks Z nazywamy *multiplikatywnym*, jeżeli dla dowolnych $\mathbb{Z}_2$-kompleksów X i Y spełniony jest następujący warunek (odwrotny do trywialnego warunku zawsze spełnionego):

jeżeli istnieje $\mathbb{Z}_2$-odwzorowanie $X \times Y \to Z$, to istnieje $\mathbb{Z}_2$-odwzorowanie $X \to Z$ lub $Y \to Z$.

W rozdziale IV rozprawy autor dowodzi, że kompleks pudełkowy grafu multiplikatywnego jest multiplikatywny. Wynik ten jest nietrywialny — mimo że każdy $\mathbb{Z}_2$-kompleks jest równoważny kompleksowi pudełkowemu pewnego grafu, nie każde $\mathbb{Z}_2$-odwzorowanie $\mathrm{Box}(G) \to \mathrm{Box}(K)$ pochodzi od homomorfizmu $G \to K$. Jego dowód wykorzystuje konstrukcję, która dla każdej nieparzystej liczby naturalnej k grafowi G przypisuje graf $\Omega_k(G)$ zwany *k-tą odwrotną potęgą* grafu G. Operacja Ω_k jest funktorem wewnątrz kategorii grafów, który jest prawym sprzężeniem funktora k-tej potęgi. Jak dowodzi autor, ma ona następujące dwie kluczowe własności:

— kompleksy pudełkowe $\mathrm{Box}(G)$ i $\mathrm{Box}(\Omega_k(G))$ są $\mathbb{Z}_2$-homotopijnie równoważne,
— jeżeli istnieje $\mathbb{Z}_2$-odwzorowanie $\mathrm{Box}(G) \to \mathrm{Box}(K)$, to dla odpowiednio dużej nieparzystej liczby naturalnej k istnieje homomorfizm $\Omega_k(G) \to K$.

Własności te są same w sobie istotne i interesujące, niezależnie od ich wykorzystania w kontekście multiplikatywności.

Wyżej wymieniony wynik prowadzi do następującej topologicznej wersji hipotezy Hedetniemiego jako wniosku z wersji grafowej: każda sfera $\mathcal{S}^n$ jest multiplikatywna. Jak tłumaczy autor, wszystkie jednowymiarowe $\mathbb{Z}_2$-kompleksy są multiplikatywne, nie są znane żadne inne multiplikatywne $\mathbb{Z}_2$-kompleksy i wydaje się, że trudność udowodnienia hipotezy Hedetniemiego dla grafów pełnych K_n, gdzie $n \geqslant 4$, wynika właśnie z wielowymiarowości ich kompleksów pudełkowych. Autor sugeruje także, aby ewentualnych kontrprzykładów do hipotezy Hedetniemiego (w wersji topologicznej i co za tym idzie grafowej) szukać wśród pewnych znanych $\mathbb{Z}_2$-kompleksów o odpowiednich własnościach topologicznych.

Ponadto rozdział IV rozprawy zawiera twierdzenie uzyskane przez autora wspólnie z Claudem Tardifem (twierdzenie 1.8), które wskazuje jeszcze jedną nową klasę grafów multiplikatywnych — trzecie potęgi grafów o talii większej niż 12. Zawartość rozdziału IV z pominięciem tego ostatniego twierdzenia opublikowana jest w bazie arXiv jako samodzielna praca autora.

Ocena rozprawy

Wyniki przedstawione w rozprawie stanowią oryginalny i (nie licząc wspomnianego wyżej twierdzenia 1.8 w rozdziale IV) samodzielny wkład autora w badania homomorfizmów grafów. Jakość tych wyników oceniam bardzo wysoko, a w ich dowodach nie dostrzegłem błędów.

W moim przekonaniu najważniejszym oryginalnym wynikiem autora uwzględnionym w rozprawie jest twierdzenie o multiplikatywności grafów bezkwadratowych przedstawione w rozdziale III, które znacznie rozszerza zakres znanych klas grafów o tej własności. Sam ten wynik mógłby stanowić wystarczającą podstawę do nadania stopnia naukowego doktora. Autor jednak idzie w swoich rozważaniach o wiele dalej. Twierdzenia i rozumowania przedstawione w rozdziałach III i IV (w tym nowe dowody znanych wcześniej twierdzeń o multiplikatywności) pokazują, że multiplikatywność grafów we wszystkich znanych przypadkach jest konsekwencją topologicznych własności tych grafów, a nie konkretnej ich struktury. Obserwacje te pozwalają lepiej zrozumieć trudności kryjące się za oryginalną hipotezą Hedetniemiego w przypadkach $n \geqslant 4$.

 BW

Zawartość rozdziału II rozprawy wpisuje się w szerszy, obecnie bardzo aktywny kierunek badań dotyczący tzw. problemów rekonfiguracji. W szczególności ukazało się ostatnio kilka prac zawierających wyniki analogiczne do przedstawionych w rozdziale II, lecz dla innych klas grafów (np. dla klik okrężnych $K_{p/q}$, gdzie $p/q < 4$), a publikacja doktoranta obejmująca wyniki przedstawione w rozdziale II jest szeroko cytowana.

Rozprawa jest bardzo dobrze napisana pod względem formalnym i językowym. Szczególnie rozdziały II i III są bardzo starannie zredagowane i czyta się je z przyjemnością. Z jednej strony przedstawione w nich rozumowania są czysto kombinatoryczne, dzięki czemu są przystępne dla czytelnika niezorientowanego w innych obszarach matematyki, a z drugiej strony autor nie zaniedbuje potrzeby dodatkowego wyjaśnienia intuicji kryjących się za tymi rozumowaniami, które mają swoje źródło w pojęciach topologii algebraicznej (niestety za słabo znam topologię algebraiczną, żeby te intuicje były dla mnie całkowicie zrozumiałe). Nie mam też istotnych zastrzeżeń do rozdziału I, choć można było trochę ograniczyć liczbę definiowanych tam pojęć i struktur, które mogą niepotrzebnie przytłoczyć czytelnika na samym początku lektury. Rozdział IV jest zredagowany mniej starannie, co powoduje, że czyta się go trudniej. Niedoskonałości polegają między innymi na wykorzystywaniu niezdefiniowanych pojęć (np. $\mathbb{Z}_2$-matching), mało precyzyjnym formułowaniu twierdzeń (np. twierdzenie 1.3 w rozdziale IV) i niekonsekwentnym lub niestandardowym stosowaniu notacji (np. $f \circ g$ zamiast $g \circ f$ na oznaczenie złożenia funkcji $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$). Cytując niektóre znane wcześniej wyniki, autor powołuje się na publikacje, w których cytowane stwierdzenia nie padają (np. lemat 2.1 i twierdzenie 3.1 w rozdziale IV). Szczególnie dużo pracy kosztowało mnie przekonanie się, że lemat 2.1, od którego istotnie zależą wyniki przedstawione w rozdziale IV, jest rzeczywiście poprawny. Są to jednak usterki natury redakcyjnej, które nie mają wpływu na poprawność przedstawionych rozumowań ani na moją bardzo wysoką całościową ocenę rozprawy. Szczegółową listę moich uwag przekażę autorowi.

W swojej rozprawie doktorskiej mgr Marcin Wrochna wykazał się znakomitym warsztatem kombinatorycznym i algorytmicznym, dużą wiedzą i erudycją matematyczną oraz umiejętnością samodzielnego prowadzenia badań naukowych na bardzo wysokim poziomie. Na szczególne uznanie zasługuje umiejętność wyszukiwania analogii między światem kombinatoryki a światem topologii algebraicznej i przenoszenia rozumowań z tego drugiego do pierwszego. O wysokim poziomie badań prowadzonych przez doktoranta świadczą miejsca publikacji wyników tych badań — *Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science* (STACS) jest jedną z czołowych konferencji informatyki teoretycznej w Europie, zaś *Journal of Combinatorial Theory, Series B* jest w powszechnej ocenie najbardziej prestiżowym czasopismem poświęconym kombinatoryce. Ponadto mgr Marcin Wrochna posiada samodzielną publikację w *Journal of Computer and System Sciences* (jednym z najlepszych czasopism informatycznych) oraz wiele publikacji współautorskich (11 według bazy DBLP), m.in. na prestiżowych konferencjach SODA, ICALP i ESA. To rzadkość u osób na tak wczesnym etapie kariery naukowej.

Konkluzja

Uważam, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i stanowi wystarczającą podstawę nadania stopnia doktora nauk matematycznych w zakresie informatyki. Biorąc pod uwagę bardzo wysoką jakość uzyskanych w niej wyników i sposób ich zaprezentowania, wnioskuję o wyróżnienie rozprawy.

Bartosz Walczak