Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
Email: j.grytczuk@mini.pw.edu.pl

Warszawa, 1.10.2018

Recenzja pracy doktorskiej Marcina Gąsiorka

Obliczenia symboliczne i algorytmy kombinatoryczne w spektralnej klasyfikacji skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych

Rozprawa doktorska Marcina Gąsiorka dotyczy własności spektralnych skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych (w skrócie *porządków*). Zagadnienia tego typu pojawiają się w rozmaitych kontekstach, od czystej teorii grafów do reprezentacji algebr. Typowy problem polega na klasyfikacji określonej rodziny porządków ze względu na spektrum związanych z nimi macierzy incydencji, oraz skonstruowaniu efektywnych algorytmów wyznaczających rozmaite parametry występujące w znalezionej klasyfikacji. Można więc uznać, że tematyka rozprawy leży na styku kombinatoryki, algebry i informatyki teoretycznej.

Głównym problemem badanym w rozprawie jest zagadnienie klasyfikacji spektralnej porządków. Jest to szczególny przypadek klasyfikacji spektralnej tzw. *bigrafów*, czyli specjalnych multi-grafów oznakowanych (z jednolitym znakiem na multi-krawędziech pomiędzy ustaloną parą wierzchołków). W klasyfikacji porządków badanych w rozprawie wykorzystuje się dwa typy podobieństwa, tzw. *kwadratową* i *dwuliniową $\mathbb{Z}$-kongruencję Grama*. Polega ona na $\mathbb{Z}$-podobieństwie związanych z porządkami macierzy incydencji i macierzy Grama, które implikuje szereg pożądanych własności stowarzyszonych z porządkami obiektów, takich jak *spektrum Coxetera* porządku, czy jego *typ Dynkina*.

Główne wyniki rozprawy zawierają się w trzech twierdzeniach klasyfikacyjnych zajmujących odpowiednio trzy kolejne rozdziały rozprawy. Pierwszy z nich (Twierdzenie 3.17) dotyczy porządków dodatnich (których macierz Grama jest dodatnio określona) z jednym elementem maksymalny (tzw. *jednopikowych*), oraz wszystkich porządków dodatnich rozmiaru co najwyżej 14. Dla porządków o ograniczonym rozmiarze znaleziono wszystkie możliwe typy Dynkina (ze względu na oba podobieństwa). Natomiast w przypadku porządków jednopikowych klasyfikacji dokonano z dokładnością do izomorfizmu. Wyznaczono cztery regularne rodziny nieskończone (o prostym rekurencyjnym opisie), oraz około 200 przypadków wyjątkowych, które opisano przy pomocy tzw. *kołczanów Hassego*. Dowiedziono również, że obie kongruencje, kwadratowa i dwuliniowa zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy równe są spektra Coxetera oraz typy Dynkina danych porządków.

Drugi główny rezultat rozprawy (Twierdzenie 4.24) ma podobny charakter, przy czym dotyczy tzw. *porządków głównych*. Są to ponownie porządki jednopikowe *korangi* 1 (czyli takie, których macierz Grama jest dodatnio półokreślona rzędu o jeden mniejszego od wymiaru). Podobnie jak w poprzednim wyniku sklasyfikowano, ze względu na podobieństwo, wszystkie takie porządki do rozmiaru 15, podając możliwe porządki Euklidesa wyznaczające klasy podobieństwa. W przypadku nieskończonej klasy porządków jednopikowych znaleziono 7 rodzin nieskończonych oraz kilkaset (około 500) wyjątków opisanych przy użyciu kołczanów Hassego. Podobnie jak w poprzednim wyniku, pokazano, że obie rozważane kongruencje są równoważne z równościami spektrów Coxetera oraz typów Dynkina.

Podobnie rzecz się ma z trzecim głównym wynikiem (Twierdzenia 5.5, 5.20, 5.51, Lemat 5.48) w odniesieniu do porządków korangi 2 (jednopikowych lub dowolnych ale do rozmiaru co najwyżej 15). W przypadku ograniczonym wyznaczono wszystkie możliwe klasy podobieństwa kwadratowego. Dla porządków jednopikowych opisano wszystkie klasy izomorfizmu (wpadające w 14 serii nieskończonych i kilkaset wyjątków), oraz wykazano równoważność obu kongruencji z równościami spektrów Coxetera i typów Dynkina.

Metody dowodowe należą do standardowych w tej dziedzinie, lecz sama dziedzina jest nader zaawansowana i wymaga sporej erudycji, oraz opanowania rozległego warsztatu, nie tylko matematycznego, ale i informatycznego. Jest bowiem rzeczą oczywistą, iż osiągnięcie podobnych rezultatów wymagało twórczego zastosowania zaawansowanych narzędzi obliczeniowych. W istocie spora część rozprawy poświęcona jest wyczerpującym opisom algorytmów oraz ich implementacji, autorstwa Marcina Gąsiorka, wspomagających uzyskanie opisanych wyników. Ich wartość polega głównie na uzyskaniu oszczędności czasowej względem istniejących systemów obliczeniowych stosowanych w algebrze (np. Maple czy Mathematica), co w efekcie pozwala przesunąć znacząco granice dotychczasowej wiedzy w obrębie tematu rozprawy.

Omówione powyżej wyniki rozprawy nie wyczerpują jej niezwykle obfitej zawartości. Warto podkreślić, że większość materiału została już opublikowana w kilku artykułach, które ukazały się w wiodących czasopismach z algebry i kombinatoryki (np. *European Journal of Combinatorics*, *Linear Algebra and its Applications*, *Coloqium Mathematicum*, *Fundamenta Informaticae*, *Algebra and Discrete Mathematics*). Praca jest bardzo dobrze zredagowana, liczne przykłady, opisy i ilustracje pomagają zrozumieć niełatwe technicznie meritum zagadnienia. Bardzo dobrym pomysłem było umieszczenie osobnych dodatków poświęconych bigrafom i systemom pierwiastków.

Podsumowując uważam, że jest to bardzo ciekawa, solidna rozprawa doktorska w trudnej tematyce z pogranicza algebry, kombinatoryki i informatyki. Wnoszę zatem o dopuszczenie jej autora, Marcina Gąsiorka, do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Jarosław Grytczuk