Zielona Góra, dnia 15 września 2020r.

dr hab. Elżbieta Sidorowicz
Wydział Matematyki Informatyki i Ekonometrii
Uniwersytet Zielonogórski

Recenzja
rozprawy doktorskiej Pani mgr Małgorzaty Śleszyńskiej-Nowak
pt. *Silne kliki w grafach*

Tematyka rozprawy doktorskiej mgr Małgorzaty Śleszyńskiej-Nowak dotyczy trzech powiązanych ze sobą problemów: silnego kolorowania krawędzi grafu, rozmiaru silnych klik i t-silnych kliki w grafach. Silnym kolorowaniem krawędzi grafu nazywamy kolorowanie krawędzi, w którym każde dwie krawędzie będące od siebie w odległości co najwyżej dwa mają inny kolor. Silnym indeksem chromatycznym nazywamy najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do silnego kolorowania krawędzi. Silną kliką w grafie nazywamy podzbiór krawędzi, w którym każde dwie krawędzie są od siebie w odległości co najwyżej 2. Największy rozmiar silnej kliki w grafie jest dolnym ograniczeniem na silny indeks chromatyczny. t-silną kliką nazywamy podzbiór krawędzi grafu, w którym każde dwie krawędzie są od siebie w odległości nie większej niż t. W 1985 roku Erdős i Nešetřil postawili hipotezę mówiącą, że silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ nie jest większy niż $5\Delta^2/4$. Faudree, Gyárfás, Schelp i Tuza w 1990 roku opublikowali słabszą wersję tej hipotezy, mówiącą o tym, że dla każdego grafu o maksymalnym stopniu Δ rozmiar silnej kliki wynosi co najwyżej $5\Delta^2/4$. Obie hipotezy pozostają cały czas otwarte i cieszą się dużym zainteresowaniem. Powstało wiele prac, które dowodzą ograniczenia coraz bliższe podanym w hipotezach lub dowodzą prawdziwości hipotez dla pewnych klas grafów. Do tego nurtu można zaliczyć tematykę rozprawy, z tego też powodu uważam, że tematyka rozprawy jest aktualna i bardzo interesująca.

Rozprawa doktorska mgr Małgorzaty Śleszyńskiej-Nowak liczy 98 stron, składa się z czterech rozdziałów i podsumowania. Wszystkie uzyskane w rozprawie rezultaty, w mojej ocenie, są merytorycznie poprawne.

Pierwszy rozdział zawiera definicje i oznaczenia pozwalające omawiać podstawowe wyniki rozprawy oraz znane twierdzenia i hipotezy, które autorka wykorzystuje w swojej rozprawie. Główne wyniki rozprawy zawarte są w rozdziałach drugim, trzecim i czwartym.

Tematem rozdziału drugiego jest silne kolorowanie krawędzi grafu. Głównymi wynikami tego rozdziału są górne oszacowania na indeks chromatyczny wybranych klas grafów. Rozważane są grafy bezcięciwowe, grafy bez szponów, grafy bez $K_{1,r}$ oraz grafy przecięć dysków jednostkowych. Dla grafów bezcięciwowych o maksymalnym stopniu Δ zostało udowodnione twierdzenie, mówiące że silny indeks chromatyczny wynosi co najwyżej $4\Delta - 3$. Ograniczenie to, dowodzi prawdziwości hipotezy Erdős i Nešetřil w tej klasie grafów. Ponadto wynik ten poprawia znane do tej pory ograniczenie $7\Delta - 9$.

Dowód tego twierdzenia polega na wyznaczeniu takiego porządku krawędzi, aby algorytm zachłanny użył co najwyżej $4\Delta - 3$ kolorów. Dla grafów bez szponów o maksymalnym stopniu Δ pokazane zostało, że silny indeks chromatyczny grafów bez szponów o maksymalnym stopniu Δ nie jest większe niż $1,125\Delta^2 + \Delta$. Dla $\Delta \geqslant 12$ otrzymujemy wynik, który potwierdza prawdziwości hipotezy Erdősa i Nešetřila. Dowód tego twierdzenia możemy podzielić na dwie części. W pierwszej części ustalony został porządek krawędzi określony względem liczby trójkątów zawierającą krawędź, każda kolejna krawędź porządku należy do nie mniejszej liczby trójkątów. Następnie zostało wyznaczone wyrażenie trzech zmiennych będące ograniczeniem górnym na liczbę krawędzi, które poprzedzają krawędź w ustalonym porządku i jednocześnie są w odległości co najwyżej 2 od niej. W drugiej części dowodu zostało udowodnione, że wartość tego wyrażenia, przy zadanych ograniczeniach na zmienne, wynosi co najwyżej $1,125\Delta^2 + \Delta - 1$. Zatem kolorując krawędzie zachłannie względem ustalonego porządku użyjemy co najwyżej $1,125\Delta^2 + \Delta$ kolorów. Obie części dowodu są dość złożone i trudne. Podobny schemat rozumowania został zastosowany w dowodach twierdzeń podających górne oszacowanie na silny indeks chromatyczny grafów bez $K_{1,r}$ i grafów przecięć dysków jednostkowych. To znaczy najpierw zostało zdefiniowane wyrażenie ograniczające z góry liczbę krawędzi, które są w odległości co najwyżej 2 od danej krawędzi, a następnie została oszacowana wartość tego wyrażenia. Podoba mi się zastosowany schemat dowodów, dzięki niemu trudne dowody napisane są w sposób zrozumiały i przejrzysty.

Trzeci rozdział rozprawy poświęcony jest rozmiarowi silnych klik. Rozmiar największej silnej kliki grafu nie jest większy od jego indeksu chromatycznego, dlatego wyniki z rozdziału drugiego są również ograniczeniami na rozmiar silnych klik w grafach należących do odpowiednich klas grafów. Jednym z głównych wyników tego rozdziału jest twierdzenie mówiące, że rozmiar silnej kliki jest ograniczony z góry przez $1,5\Delta^2$ w grafach o maksymalnym stopniu Δ. Poprzednim znanym ograniczeniem było $1,74\Delta^2$, udowodnione przez Bruhn i Joos. W roku 2019 Faron i Postle otrzymali najlepsze obecnie znane ograniczenie, które wynosi $4\Delta^2/3$. Idea dowodu, że $1,5\Delta^2$ jest ograniczeniem górnym rozmiaru silnej kliki jest podobna do dowodu twierdzenia Faudree, Gyárfása, Schelpa i Tuzy mówiącego, że rozmiar silnej kliki w grafach dwudzielnych o maksymalnym stopniu Δ wynosi co najwyżej Δ^2, ale uzyskanie wyniku dla wszystkich grafów (nie tylko dwudzielnych) wymagało zaobserwowania dodatkowych własności. Ponadto w rozdziale trzecim, podobnie jak w rozdziale drugim, badane są grafy bez szponów. Pokazane zostało, że rozmiar silnej kliki w grafach bez szponów o maksymalnym stopniu co najwyżej Δ wynosi co najwyżej $\Delta^2 + \Delta/2$. Dowód tego twierdzenia jest podobny do dowodu twierdzenia z rozdziału 2, które podaje górne ograniczenie na silny indeks chromatyczny w grafach bez szponów, chociaż wymagał dokładniejszej analizy i rozważenia większej liczby przypadków. W pierwszej części dowodu wyznaczone zostaje wyrażenie zawierające trzy zmienne i pokazane jest, że wyrażenie to jest górnym ograniczeniem na liczbę krawędzi w największej silnej klice. W drugiej części dowodu pokazane jest, że wartość tego wyrażenia przy danych ograniczeniach na zmienne wynosi co najwyżej $\Delta^2 + \Delta/2$. W dowodzie tym zauważyłam błędy, które prawdopodobnie wynikają z kopiowania fragmentów poprzedniego dowodu. Na stronie 64 w linii 6 jest "... *gdzie* $I_{d_i > d_3+1}$

wynosi 1 *gdy* $d_i > d_3 + 1$, *a* 0 *w przeciwnym przypadku* ...", a powinno być "... *gdzie* $I_{d_3>d_1+d_2}$ *wynosi* 1 *gdy* $d_3 > d_1 + d_2$, *a* 0 *w przeciwnym przypadku* ...". Na Stronie 64 w linii 11 jest "... *jest ich* Δd_1 ...", a powinno być "... *jest ich* $\binom{d_1}{2}$ ...", podobnie na stronie 64 w linii 12 jest "... *jest ich* Δd_2 ...", a powinno być "... *jest ich* $\binom{d_2}{2}$ ...". W końcowej części rozdziału podane zostały przykłady grafów bez szponów i przykłady grafów bez $K_{1,4}$ o dużym silnym indeksie chromatycznym (Obserwacja 2.30 i 2.31). W dowodach tych obserwacji udowodnione zostało, ile co najmniej kolorów potrzebujemy do silnego pokolorowania krawędzi podanych grafów, zabrakło dowodu, że podana liczba kolorów wystarczy.

W rozdziale czwartym autorka zajęła się mniej znanym problemem - oszacowaniem największego rozmiaru t-silnych klik. Udowodnione zostało twierdzenie, że rozmiar t-silnych klik w grafach o maksymalnym stopniu Δ wynosi co najwyżej $1,75\Delta^t + O(\Delta^{t-1})$. Dla grafów dwudzielnych udało się poprawić ograniczenie do $\Delta^t + O(\Delta^{t-1})$. Ponadto zostały też znalezione ograniczenia na rozmiar t-silnych klik dla grafów bez $K_{1,r}$ i grafów o dużej talii.

Rozprawa doktorska została dobrze zredagowana, napisana starannie z dbałością o ścisłość rozumowań. Znalazłam niewiele drobnych pomyłek i literówek. W szczególności słowa takie, jak twierdzenie, stwierdzenie, lemat, hipoteza pisane są dużą literą, w języku polskim piszemy je z małej litery. Na stronie 44 w linii 10 jest "*istnieje graf bez szponów* G_k *o maksymalnym stopniu* Δ" powinno być "*istnieje graf* G_k *bez szponów o maksymalnym stopniu* Δ", podobnie na stronie 45 w linii 2 jest "*istnieje graf bez* $K_{1,4}$ G_k *o maksymalnym stopniu* Δ" powinno być "*istnieje graf* G_k *bez* $K_{1,4}$ *o maksymalnym stopniu* Δ". Podobne pomyłki można znaleźć jeszcze w innych miejscach. Przedstawione uwagi, mają charakter redakcyjny i nie obniżają wartości merytorycznej rozprawy.

Podsumowując, moja oceny rozprawy doktorskiej mgr Małgorzaty Śleszyńskiej-Nowak jest bardzo dobra. Uzyskała ona szereg ciekawych wyników podających ograniczenia na silny indeks chromatyczny oraz rozmiar silnych i t-silnych klik w grafach. Niektóre wyniki poprawiają znane do tej pory do tej ograniczenia, autorce udało się także pokazać prawdziwość hipotezy Erdősa i Nešetřila w pewnych kasach grafów. Rezultaty opisane w rozprawie uważam za wartościowe, a dowody przedstawione w pracy są nietrywialne i złożone. Warto podkreślić, że cześć wyników rozprawy została już opublikowana w dobrych czasopismach (*Discrete Mathematics*, *Discrete Applied Mathematics*, *Information Processing Letters*)

Uważam, więc że rozprawa doktorska mgr Małgorzaty Śleszyńskiej-Nowak zdecydowanie spełnia wymogi stawiane pracom doktorskim w Ustawie o stopniach i tytule naukowym i wnioskuję o dopuszczenie mgr Małgorzaty Śleszyńskiej-Nowak do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Elżbieta Sidorowicz

Elżbieta Sidorowicz