Recenzja pracy doktorskiej
"Rozwiązania osobliwości ilorazowych i ich pierścienie Coxa"
przedstawionej przez mgra Maksymialana Graba

1. Informacje ogólne

Recenzowana praca doktorska dotyczy opisu pierścieni Coxa rozmaitości powstałych przez minimalne rozwiązanie osobliwości ilorazowych w niskich wymiarach. Pierścienie Coxa dla rozmaitości rzutowych zostały wprowadzone w 2000 roku przez Hu oraz Keela jako uogólnienie konstrukcji Coxa pierścienia współrzędnych rozmaitości torycznych. Ich znaczenie wynika z faktu, że zawierają one wiele informacji o geometrii biwymiernej rozmaitości. W szczególności, istotnym wynikiem z pracy Hu-Keela jest twierdzenie o tym, że pierścień Coxa jest skończenie generowany wtedy i tylko wtedy gdy rozmaitość jest tzw. Mori Dream Space. Całą informację o jej modelach biwymiernych można w takim wypadku wywnioskować z opisu tego pierścienia. Okazuje się jednak, że pierścienie Coxa można również badać w przypadku rozmaitości nierzutowych, otrzymując podobne rezultaty. W szczególności, jednym z pierwszych wyników recenzowanej pracy jest uogólnienie twierdzenia Hu oraz Keela na kontekst rozmaitości, które posiadają morfizm rzutowy na rozmaitość afiniczną. Ciekawą i ważną do zbadania klasą przykładów są tu rozmaitości powstałe jako minimalne rozwiązania osobliwości rozmaitości afinicznych, będących ilorazami przestrzeni zespolonej przez działanie grupy skończonej. Pomysł opisu wszystkich rozwiązań danej osobliwości ilorazowej przez badanie odpowiedniego pierścienia Coxa został zapoczątkowany w pracy Donten-Bury i Wiśniewskiego (promotorów Pana Graba), w której autorzy badają rozwiązania pewnej znanej osobliwości symplektycznej. Recenzowana rozprawa rozwija te idee. Dokładniej, jako, że w tym przypadku pierścienie Coxa są skończenie generowane, do opisania wszystkich rozwiązań minimalnych wystarczy dokładne opisanie tych pierścieni. Większość wyników pracy skupia się zatem na opisaniu pierścieni Coxa rozwiązań minimalnych różnych rodzajów ilorazów. Choć istnieją algorytmy (przedstawione również w tej rozprawie), żeby taki opis przeprowadzić, stają się one bardzo szybko nieefektywne w interesujących nas przypadkach. Dlatego Pan Grab wprowadza nowe metody w celu badania ciekawych klas przykładów dając szansę na dalszy postęp w tematyce. W ten sposób praca poszerza naszą wiedzę praktyczną o niezwykle ważnych w geometrii algebraicznej osobliwościach ilorazowych.

Rozprawa doktorska oparta jest na wynikach trzech publikacji naukowych, z których dwie są napisane wspólnie z jej promotorem pomocniczym, a jedna jest samodzielna. Jedna współautorska praca pojawiła się już w dobrym czasopiśmie matematycznych (Experimental Mathematics), pozostałe dostępne są w formie preprintu. Chciałbym jednak zwrócić uwagę, że przedstawione w rozprawie wyniki są nieco ogólniejsze od tych zawartych w powyższych publikacjach. Ponadto, praca doktorska jest bardzo spójna, w szczególności przedstawia wyraźną jednolitą strategię łączącą omawiane prace oraz wyznaczającą planowany kierunek przyszłych badań autora.

2. Opis merytoryczny

Poniżej przedstawiam dokładniejszy opis poszczególnych części rozprawy.

Rozdział 1. W pierwszym rozdziale autor przedstawia ogólny zarys pracy, jej motywacje oraz wyniki innych autorów w dziedzinie. W sposób przystępny pokazane są główne idee oraz najważniejsze wyniki omówione w dalszych rozdziałach.

Rozdział 2. Rozdział drugi wprowadza narzędzia teorii osobliwości ilorazowych oraz ich rozwiązań minimalnych. W szczególności, przedstawia klasyfikacje takich osobliwości w wymiarze 2 oraz w pewnych przypadkach wymiaru 3. Autor omawia również czterowymiarowe osobliwości symplektyczne i ich symplektyczne rozwiązania. Ponadto, w tym rozdziale wprowadzone są istotne w dalszej części elementy odpowiedniości McKay.

Rozdział 3. Trzeci rozdział podąża śladem pionierskiej publikacji Hu oraz Keela wprowadzającej oraz badającej własności pierścienia Coxa. Przy czym, Pan Grab rozważa sytuację, w której badane rozmaitości nie są rzutowe, a jedynie posiadają morfizmy rzutowe na rozmaitość afiniczną. Odpowiednio dostosowując pojęcie Mori Dream Space, autor otrzymuje wyniki podobne do wyników dotyczących rozmaitości rzutowych i mające również analogiczne znaczenie dla badanego kontekstu. Dowód jest praktycznie powtórzeniem rozumowania Hu oraz Keela ze stosownymi modyfikacjami jednak w tak uogólnionej formie twierdzenie pojawia się po raz pierwszy dopiero w recenzowanej rozprawie.

Rozdział 4. Czwarty rozdział wprowadza ogólną strategię działania proponowaną do opisu pierścieni Coxa minimalnych rozwiązań osobliwości ilorazowych. Zawiera on również twierdzenia, na których ta strategia będzie się opierać. Pierwsza idea polega na tym, żeby dla ustalonego morfizmu biwymiernego $\varphi : X \to Y$ rozważać kandydatów na zbiory generujące pierścień Coxa X składających się z dwóch części: pierwszej, związanej z wybranym zbiorem generującym pierścień Coxa Y, a drugiej z samymi dywizorami wyróżnionymi φ. W ten sposób dla każdego zbioru generującego pierścień Coxa rozmaitości Y składającego się z elementów jednorodnych, otrzymamy kandydata na zbiór generujący pierścień Coxa X. Następnie poznajemy warunek waluacyjny na wybrany zbiór generatorów $\mathscr{R}(Y)$, żeby zadawał zbiór generatorów pierścienia Coxa rozwiązania X. Chciałbym tu zwrócić uwagę, że w przypadku rozwiązań minimalnych osobliwości ilorazowych istnieje algorytm jak taki zbiór generatorów $\mathscr{R}(Y)$ znaleźć. Algorytm został po raz pierwszy sformułowany przez Yamagishiego. Należy jednak zauważyć, że opiera się on na pomysłach z prac Pana Graba (przedstawionych w tej rozprawie) oraz jego promotorów, ponadto w dalszej części rozprawy przedstawione jest ulepszenie tego algorytmu. Niestety w interesujących przypadkach nawet ulepszony algorytm jest wciąż niewystarczająco efektywny. Jednym z celów dalszych części rozprawy jest ominięcie tych trudności technicznych, poprzez wprowadzenie nowych narzędzi. Druga metoda opiera się na charakteryzacji pierścienia Coxa rozmaitości w terminach ilorazu jego spektrum przez działanie torusa Picarda. Pozwala ona sprawdzić czy dany pierścień jest pierścieniem Coxa, jednak jest również nieefektywna obliczeniowo. Ostatnia metoda polega na ograniczeniu stopni generatorów pierścienia Coxa. Powyższe metody oraz ich elementy stosowane w kombinacji tworzą szeroki wachlarz możliwości wyznaczania oraz badania różnych aspektów pierścieni Coxa.

Rozdział 5. W piątym rozdziale badane są trójwymiarowe osobliwości ilorazowe opierając się głównie się na pierwszej metodzie, czyli kryterium waluacyjnym. Rozdział opiera się na pracy wspólnej z Dr Donten-Bury opublikowanej w Experimental Mathematics. Autorzy opisują pierścień Coxa rozwiązań ilorazów $\mathbb{C}^3/G$, dla których odpowiadająca reprezentacja grupy G jest rozkładalna. Dzięki klasyfikacji dwuwymiarowych osobliwości ilorazowych można znaleźć naturalny zbiór generatorów pierścienia Coxa takiej osobliwości ilorazowej. Okazuje się, otrzymany zbiór spełnia kryterium waluacyjne. Mając pierścień Coxa autorzy opisują dokładnie wszystkie rozwiązania w kilku wybranych przypadkach. Należy zwrócić uwagę, że przypadek reprezentacji rozkładalnych jest zdecydowanie łatwiejszy od przypadku reprezentacji nierozkładalnych. Jednak metody przedstawione w tej rozprawie radzą sobie również w niektórych nierozkładalnych przypadkach nawet gdy wśród generatorów grupy są elementy wieku 2, co jest już znacznie poważniejszym wyzwaniem w ogólności. W przedstawionych przykładach szukanie odpowiedniego zbioru generatorów pierścienia Coxa osobliwości jest już trudniejsze i opiera się częściowo na obliczeniach komputerowych przy rozważnym użyciu ulepszonego algorytmu Yamagishiego. Tu również w każdym z konkretnych przypadków oprócz konstrukcji pierścienia Coxa odtworzone zostają wszystkie modele minimalne badanej osobliwości.

Rozdział 6. Rozdział szósty służy wprowadzeniu narzędzi potrzebnych w rozdziale siódmym do liczenia niezmienników kandydatów na pierścień Coxa. Ten rozdział poszerza już szeroki wachlarz narzędzi używanych w niniejszej rozprawie. Tym razem, autor tłumaczy na kontekst relatywny teorię działań torusa na rozmaitościach rzutowych i związanych z nią niezmienników. Po raz kolejny Pan Grab skrupulatnie idzie śladami znanej teorii dostosowując ją do swoich potrzeb co potwierdza jak bardzo zgłębił on dostępne techniki.

Rozdział 7. Rozdział siódmy jest najtrudniejszy pod względem technicznym. Autor bada rozwiązania krepantne czterowymiarowych osobliwości symplektycznych w trzech z czterech znanych przypadków, czwarty został wcześniej zbadany podobnymi technikami przez promotorów Pana Graba. Najtrudniejszy tu jest przykład badany wcześniej przez Bellamiego-Schedlera oraz Lehna-Sorgera. Jest on przedmiotem preprintu napisanego samodzielnie przez Pana Graba. Autor proponuje nowe podejście do konstruowania pierścieni Coxa. Nowe podejście jest subtelnym połączeniem elementów wszystkich metod oraz wyników z rozdziału szóstego, wspomaganych obliczeniami komputerowymi. Dokładniej, polega ono na znalezieniu naturalnego zbioru kandydatów na generatory jak w metodzie pierwszej, konstruując pewien podpierścień $\mathscr{R}$ pierścienia Coxa, oraz badaniu działania torusa Picarda, jak w metodzie drugiej na rozmaitość $\operatorname{Spec}\mathscr{R}$. Następnie liczymy odpowiednie niezmienniki metodami z rozdziału szóstego i wykorzystujemy te niezmienniki do sprawdzenia, że nasz pierścień zawiera sekcje wiązek stopni ograniczonych metodą trzecią. W ten sposób autor jest w stanie opisać pierścienie Coxa rozwiązań krepantnych badanych osobliwości symplektycznych. Zwróćmy uwagę, że nawet najtrudniejszy z powyższych przykładów został również rozwiązany algorytmem Yamagishiego. Jednak otrzymany zbiór generatorów jest zbyt duży co utrudnia pracę z otrzymanym pierścieniem. Ponadto, zważywszy na fakt, że ogólna klasyfikacja osobliwości ilorazowych posiadających rozwiązania krepantne jest wciąż otwarta, a algorytm Yamagishiego nie radzi sobie z bardziej skomplikowanymi przykładami, wydaje się, że podejście przedstawione w tym rozdziale jest bardziej perspektywiczne. Rozprawa kończy się szkicem strategii, która doprowadziła do opisania powyższych przykładów i daje nadzieję na nowe wyniki. W szczególności, pojawia się zapowiedź dalszej pracy w temacie.

3. Redakcja

Praca doktorska napisana jest w sposób przemyślany. Rozprawę czyta się płynnie, jej struktura jest czytelna, wszelkie pojawiające się ewentualne wątpliwości rozwiewane są na bieżąco, a wszystkie niezbędne referencje są dokładne. W tekście zapisane są nie tylko suche twierdzenia i dowody, ale omówione są również idee stojące za rozumowaniami. Z tego względu uważam, że rozprawa może z powodzeniem służyć za wyczerpujące źródło wiedzy dla osoby próbującej nauczyć się teorii osobliwości ilorazowych, ich rozwiązań i pierścieni Coxa. Język angielski użyty w rozprawie jest bardzo poprawny, a wszystkie niedociągnięcia zostały poprawione w drugiej wersji pracy, pozostało jednie kilka nieistotnych literówek.

4. Podsumowanie

Rozprawa doktorska dotyczy ważnej tematyki obecnie intensywnie rozwijanej na całym świecie. Zawiera ona nowe wyniki oraz idee, które istotnie przyczyniają się do rozwoju tej teorii. Pan Grab wykazał się znajomością szerokiego aparatu badawczego oraz dużą biegłością w operowaniu trudnymi narzędziami nowoczesnej matematyki. Przedstawiona rozprawa jest napisana bardzo przystępnie i może z powodzeniem służyć za punkt startowy do rozważań nad rozwiązaniami krepantnymi osobliwości ilorazowych. W związku z powyższym, **uważam, że recenzowana praca spełnia wszelkie wymagania stawiane pracom doktorskim oraz wnoszę o dopuszczenie Pana Maksymiliana Graba do dalszych etapów przewodu doktorskiego**. Rozprawę oceniam bardzo wysoko.

Michał Kapustka