Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Magdaleny Wiertel pt.
"Structure and representations of Hecke-Kiselman algebras associated to oriented graphs."

Przedmiotem badań są monoidy Hecke-Kislemana HK_Θ stowarzyszone z grafami zorientowanymi (bez pętli i bez wielokrotnych krawędzi) w następujący sposób: generatorami są przez wierzchołki Θ z relacjami: $x^2 = x$ dla każdego wierzchołka x, $xy = yx$ dla wierzchołków x, y niepołączonych strzałką oraz $xyx = yxy = xy$ gdy istnieje strzałka $x \to y$. Pojęcie to zostało wprowadzone przez Ganyushkina i Mazorchuka (J. Algebra, 2011) w oparciu o pojęcia monoidu 0-Hecke stowarzyszonego z diagramem Dynkina oraz półgrupy Kiselmana.

Rozprawa napisana jest po angielsku, liczy 131 stron i jest podzielona na 8 rozdziałów. Bibliografia zawiera 58 pozycji.

Po wstępie i pierwszym rozdziale zawierającym różne wykorzystywane dalej fakty następuje obszerny Rozdział 2. Prezentowane są w nim wyniki dotyczące struktury monoidu Hecke-Kislemana C_n stowarzyszonego ze zorientowanym cyklem długości n. Kluczowy jest tu opis słów zredukowanych (względem systemu redukcji związanego w naturalny sposób z relacjami definiującymi ten monoid) - Twierdzenie 2.1. Twierdzenie to jest wyprowadzone w rozprawie na podstawie serii lematów, których dowody są pominięte bądź naszkicowane. Pełne dowody znajdują się w pracy [1]. Zamieszczone w rozprawie szkice i wskazówki są na ogół wystarczające, by czytelnik mógł śledzić tok rozumowania, choć nie zawsze jest to łatwe - te dowody są subtelne i niebanalne. Cały Rozdział 2 utrzymany jest w tej konwencji z wyjątkiem sekcji 2.4. W Rozdziale 2 znajduje się także bardzo ważne Twierdzenie 2.44 o strukturze monoidu C_n, w szczególności o pewnym ciągu ideałów (I_i) oraz półgrupach M_i typu macierzowego zawartych w ilorazach I_i/I_{i-1}. O tych właśnie półgrupach mowa jest w części 2.4., której głównym wynikiem jest Twierdzenie 2.52 orzekające, że algebry półgrupowe typu macierzowego $K_0[M_i]$ są pierwsze. Dowód tego twierdzenia jest przeprowadzony szczegółowo, niemal każdy przypadek jest przeanalizowany.

Twierdzenie 2.44 odgrywa decydującą rolę w rozprawie, większość rezultatów wykorzystuje opis struktury monoidu C_n podany w tym twierdzeniu. Tak jest w Rozdziale 3, w którym m.in. podany jest opis klasycznego pierścienia ułamków algebry $K[C_n]$ oraz opis radykału Jacobsona algebry $K[HK_\Theta]$ w przypadku, gdy $K[HK_\Theta]$ spełnia tożsamość wielomianową (PI), co jest równoważne, na mocy wyniku Męcla i Oknińskiego (Publ. Mat. 2019), z tym, że Θ nie zawiera dwóch zorientowanych cykli połączonych droga zorientowaną.

W Rozdziale 4. główny wynik (Twierdzenie 4.2) orzeka, że algebra $K[HK_\Theta]$ jest prawostronnie ($\Leftrightarrow$ lewostronnie) noetherowska wtedy i tylko wtedy, gdy każda składowa spójna grafu Θ jest albo zorientowanym cyklem, albo jest acykliczna.

Rozdział 5. poświęcony jest opisowi reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $K[HK_\Theta]$ w przypadku PI. Znów punktem wyjścia jest opis reprezentacji nieprzywiedlnych w przypadku zorientowanego cyklu. Zakłada się, że K jest ciałem algebraicznie domkniętym.

W Rozdziale 6. wykorzystuje się (zaawansowaną) kombinatorykę słów i w pomysłowy sposób wyprowadza formułę na wymiar Gelfanda-Kiryłowa algebry $K[HK_\Theta]$ (znów przy założeniu PI, bez tego założenia wymiar GK jest nieskończony) - Twierdzenie 6.12. W kolejnym rozdziale Autorka zajmuje się tożsamościami w monoidzie Hecke-Kislemana. Dowodzi (Twierdzenie 7.2), że spełnianie półgrupowej tożsamości w HK_Θ równoważne jest spełnianiu tożsamości wielomianowej przez $K[HK_\Theta]$, co stanowi częściowe rozwiązanie ogólnego otwartego problemu czy w półgrupie S spełniona jest nietrywialna tożsamość wtedy i tylko

J. K.

wtedy, gdy algebra półgrupowa $K[S]$ jest PI.

Wreszcie Rozdział 8. zawiera ilustracje i uzupełnienia ogólnej teorii w przykładach C_3 i C_4. W tym rozdziale znajduje się też dyskusja centrum algebry $K[C_3]$; w bardzo skomplikowanej technicznie części 8.5 opisana jest w sposób jawny pewna podalgebra Z centrum na tyle duża, że $K[C_3]$ jest skończenie generowanym modułem nad Z. Rozdział kończy dyskusja ograniczeń możliwości powtórzenia niektórych rozumowań dla $K[C_n]$ w przypadku większych n.

Większość wyników została opublikowana w pracach [1], [2], [3], [4]:

[1] J. Okniński i M. Wiertel, Combinatorics and structure of Hecke-Kiselman algebras, Commun. Contemp. Math. 22 (2020), no. 7.

[2] J. Okniński i M. Wiertel, On the radical of a Hecke-Kiselman algebra, Algebr. Represent. Theory 24 (2021), no. 6, 1431–1440.

[3] M. Wiertel, Irreducible representations of Hecke-Kiselman monoids, Linear Algebra Appl. 640 (2022), 12–33.

[4] M. Wiertel, The Gelfand-Kirillov dimension of Hecke-Kiselman algebras, Forum Math. 35 (2023), no. 2, 523–534.

W rozprawie znajdują się też wyniki niepublikowane (Rozdział 7, sekcja 8.5).

Tematyka jest dobrze umotywowana i wpisuje się w ważny nurt współczesnej algebry. Relacje typu $xyx = yxy$ występują w wielu zagadnieniach algebraicznych, co powoduje, że struktury podobne do rozważanych w rozprawie pojawiają się w różnych kontekstach. Przykładem mogą być związki równania Yanga-Baxtera z reprezentacjami monoidów Hecke-Kiselmana (V. Lebed, arXiv:2102.08647; w pracy Lebed cytowany jest artykuł [1]). A. L. Grensing (J. Algebra, 2012) bada monoid tzw. funktorów rzutowania (projection functors) stowarzyszonych z modułami prostymi nad algebrą dróg kołczanu (grafu zorientowanego) Q. Funktory takie mają związek z ważną w teorii reprezentacji algebr procedurą konstruowania podkategorii ortogonalnych, zaś badany monoid jest silnie związany z półgrupą Hecke-Kiselmana kołczanu Q. Wreszcie łańcuchy ideałów odgrywające podstawową rolę w pracy Koeniga i Xi (Adv. Math, 2012) mają wiele wspólnego z łańcuchem ideałów z Tw. 2.44 rozprawy.

Rozprawa jest obszerna i bogata w treści matematyczne, stanowi spójne tematycznie i kompletne opracowanie obejmujące różne aspekty struktury i teorii reprezentacji monoidów i algebr Hecke-Kiselmana grafów zorientowanych. Dorobek doktorantki jest bardzo dobry: jest współautorką dwóch prac wspólnych z promotorem i samodzielną autorką dwóch kolejnych prac.

Rozprawę oceniam bardzo wysoko. Jej przygotowanie wymagało dużej wiedzy algebraicznej i kultury matematycznej. O szerokości horyzontów Autorki świadczy kompetentnie napisany rozdział wstępny, a także spis literatury. Jest w rozprawie dużo kombiantoryki i żmudnych obliczeń, jest także ogólna teoria pierścieni i półgrup, teoria reprezentacji, tożsamości wielomianowe, w jakiejś mierze teoria automatów. Wyniki są oryginalne i mają

S. K

dużą wartość naukową. Bardzo podoba mi się elegancki wynik dotyczący wymiaru Gelfanda-Kiryłowa (Rozdział 6., praca [4]). W całej pracy Autorka wykazała się pomysłowością połączoną z dużą sprawnością techniczną, precyzją i pracowitością. Praca napisana jest z zachowaniem wszystkich standardów pracy naukowej z matematyki, ma także pewien oryginalny styl. Większość dowodów przedstawiona jest ze szczegółami; poza większą częścią Rozdziału 2. - tu świadomą decyzją Autorki było pominięcie niektórych dowodów z [1].

Mam pewne wątpliwości co do celowości tego zabiegu. Cała praca [1] liczy 28 stron, pomijając dowody oszczędzono pewnie ok. 10 stron. Charakter przedstawianych rezultatów pozwala czytelnikowi na ogół samodzielnie podążać za tokiem rozumowania, ale są miejsca trudne; i tak trzeba zaglądać do [1], zatem oszczędność jest pozorna.

W ten sposób przeszedłszy do uwag krytycznych wspomnę jeszcze, że w dowodzie (i tak bardzo trudnym!) Twierdzenia 2.52 występują odwołania do dowodów poprzedzających technicznych lematów. Może dałoby się tak ułożyć materiał, by odwoływać się wyłącznie do sformułowań? Pewien niedosyt pozostawiła część 1.3. Fakty, do których są później odwołania w dowodzie Twierdzenia 7.1 (np. czemu maksymalna podgrupa M_{n-2} jest nieskończona cykliczna), są wyłożone w 1.3 w nieco zakamuflowany sposób. Ponadto na str. 25, w. 9 od dołu: chyba powinno być "cyclic group", a nie "semigroup"? W ostatnim wierszu na tej samej stronie, pierwsza formuła: powinno być $g^{\alpha}p_{y'x'}p_{yx'}^{-2}g^{-\gamma}$.

Jeśli chodzi o dowód 7.1, to uważam, że zdanie zaczynające się od "Therefore" (str. 107, w. 11 od dołu) wymaga dokładniejszego objaśnienia.

Załączam listę drobniejszych uwag i pytań, których nie włączam do recenzji ze względu na ich marginalny charakter.

Powyższe uwagi nie wpływają na moją bardzo wysoką ocenę rozprawy.

Podsumowanie. Rozprawa Magdaleny Wiertel "Structure and representations of Hecke-Kiselman algebras associated to oriented graphs" spełnia z naddatkiem wymogi, które powinna spełniać rozprawa doktorska. Zawiera oryginalne wyniki naukowe o dużej wartości merytorycznej, jest napisana zgodnie z zasadami pisania prac naukowych z matematyki. Dorobek Autorki świadczy o jej dużym potencjale twórczym i możliwościach samodzielnego prowadzenia badań matematycznych. Zakres przedstawionych treści, jakość rozprawy i pomysłowość rozumowań skłania mnie do sformułowania wniosku o wyróżnienie rozprawy.

Wnoszę o dopuszczenie mgr Magdaleny Wiertel do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Toruń, dnia 7 lipca 2023 r.

Stanisław Kasjan

S. Kasjan

Drobne uwagi - załącznik do recenzji rozprawy doktorskiej mgr Magdaleny Wiertel pt.
"Structure and representations of Hecke-Kiselman algebras associated to oriented graphs."

1. Str. 11, w. 7: Raczej "from the definition of the prime radical".
2. Str. 12, w. 6 od dołu: W drugiej nierówności po prawej stronie powinno być $f(m_2 n)$.
3. Str. 18: Raz używa się słowa "factor", a raz "quotient" (w odniesieniu do ilorazu).
4. Str. 27: Brak pętli nie wynika z definicji "simple finite", zatem zwrot "In particular" nie jest włściwy w tym miejscu.
5. Str. 36: Czy rzeczywiście prefix (suffix) słowa musie być różny of 1? DowĂłd Proposition 2.13 na stronie 41 sugeruje coś innego. Brak definicji $suff_1$.
6. Str. 39: To tylko szkic dowodu, ale pominięcie uzasadnienia, że j nie może być mniejsze od $s-1$ może być mylące.
7. Str. 40, w. 7 i 8 od dołu: powinno być $pref_1$.
8. Str. 41, w. 4: powinno być "for $1 < s < n$".
9. Str. 44: Uzasadnienie uwagi 2.16 o wymiarze Gelfanda-Kiryłowa wymaga także wiedzy o mocy zbiorów B_i - o tym nie było dotąd mowy, odpowiednia informacja pojawia się dopiero w Corollary 2.30.
10. Lemma 2.19: W ostatnim zdaniu chodzi chyba o "reduced form of $(x_{k+1} \dots x_n x_1 \dots x_k)w$"?
11. Str. 47: fakt, że $supp(f(wy)) \subseteq supp(f(w))$ nie jest taki całkiem oczywisty, argumenty nie są podane nawet w artykule [?]!
12. Str. 53, w. 18: W części następującej po "prefix of the form $aq^k_{n,i} x_n v x_j$ trzeba chyba jakoś uzasadnić, że można zakładać $|v|_n = 0$?
13. Str. 59, w. 5: Czy tu nie chodzi o $s_{(ii),i_{s+1}=1} x_{m-1}$?

14. Str. 61, w. 8 od dołu: Powinno być $x_jx_nx_1 \in suff(u)$.

15. Str. 72, w. 2: Jeśli któryś z x, y jest końcem lub początkiem, to nie jest możliwe, żeby strzałka między nimi należała do zorienowanego cyklu.

16. Str. 72, w. 10: Co to jest "band with 2 elements"?

17. Str. 80, w. 12: Powinno być $i_{s+1} < i_s$ i $i_s - i_{s+1} \geq 2$.

18. Str. 81: Co to znaczy "almost Munn algebra"?

19. Str. 97: Oznaczenie C_n jest mylące - przedtem to była algebra Hecke-Kislemana C_n zorientowanego cyklu długości n.

20. Str. 98: Czy do opisu postaci słowa u^jvw^k nie potrzeba Tw. 2.1? Zaś w wierszu 3. powinno być $w = a'q_{N,l}^{\alpha_2}b'$.

21. Str. 104, w. 6 od dołu: Powinno być k_{y_j}.

22. Str. 119, w. 6 i 5 od dołu: Jak rozumieć $(qx\hat{t})$ jako element $\mathcal{M}$?

Toruń, dnia 7 lipca 2023 r.

Stanisław Kasjan

S. Kasj