WYDZIAŁ INFORMATYKI
Politechniki Białostockiej
15-351 Białystok, ul. Wiejska 45A
tel. +48 85 746 90 50, fax +48 85 746 90 57
e-mail: wi.sekretariat@pb.edu.pl
www.wi.pb.edu.pl

prof. dr hab. Piotr Grzeszczuk
Politechnika Białostocka
Wydział Informatyki

Białystok, 07.07.2023r.

Recenzja
rozprawy doktorskiej
Magdaleny Wiertel

p.t.

Structure and representations of Hecke-Kiselman algebras asociated to oriented graphs

dla Rady Naukowej Dyscyplin Matematyka i Informatyka
Uniwersytetu Warszawskiego

Rozprawa doktorska magister Magdaleny Wiertel dotyczy kombinatorycznych własności monoidów Hecke-Kiselmana oraz struktury stowarzyszonych z nimi algebr półgrupowych nad ciałami, zwanych algebrami Hecke-Kiselmana. Wspomniane wyżej obiekty zostały zdefiniowane stosunkowo niedawno, w pracy z 2011 roku [O. Ganyushkin and V. Mazorchuk, On Kiselman quotients of 0-Hecke monoids, Int. Electron. J. Algebra 10 (2011), 174-191]. Jednym z powodów zainteresowania się monoidami Hecke-Kiselmana (krótko HK monoidami) jest to, że są one naturalnymi ilorazami monoidów Hecke. Te ostatnie, silnie powiązane z grupami Coxetera i algebrami Hecke są ważne w wielu aspektach teorii reprezentacji oraz w kombinatoryce. Tak więc jest to problematyka młoda, ale mająca ścisły związek z klasycznymi nurtami algebry. HK monoidy powiązane z acyklicznymi grafami skierowanymi są skończone, a więc ich budowa jest dobrze opisana. Dalece niejasna wydaje się jednak struktura HK monoidów w przypadku, gdy stowarzyszone grafy zawierają cykle. Naturalnym krokiem jest wyjaśnienie struktury algebr półgrupowych $K[C_n]$, gdzie C_n jest HK monoidem powiązanym z zorientowanym cyklem długości $n \geqslant 3$. Tego właśnie zagadnienia dotyczy przedłożona rozprawa Magdaleny Wiertel.

Rozprawa jest obszerna (131 stron); składa się ze wstępu, ośmiu rozdziałów (zróżnicowanej długości) oraz bibliografii, w której wymieniono 58 pozycji. Wstęp zawiera motywacje, krótki rys historyczny oraz prezentację głównych wyników rozprawy.

W Rozdziale 1 autorka wprowadza niezbędny aparat pojęciowy oraz przypomina fundamentalne rezultaty z teorii pierścieni nieprzemiennych i algebr półgrupowych. Prezentuje główne obiekty rozważane w pracy, czyli monoidy Hecke-Kiselmana oraz ich algebry. Eksponuje ich kombinatoryczne aspekty prezentując, znalezione przez A. Męcla i J. Oknińskiego, charakteryzacje baz Gröbnera algebr Hecke-Kiselmana. Charakteryzacje te odgrywają istotną rolę w dowodach głównych rezultatów rozprawy.

Fundamentalnym wynikiem dla wyjaśnienia struktury monoidu C_n wydaje się Twierdzenie 2.1 z Rozdziału 2, pokazujące szczególną postać zredukowaną prawie wszystkich elementów monoidu C_n. Ta szczególna postać jest kluczem w zbadaniu zarówno monoidu C_n, jak i algebry półgrupowej $K[C_n]$. Podstawowym narzędziem wykorzystywanym w tej części pracy są wspomniane wyżej bazy Gröbnera monoidu C_n. Jest to część bardzo złożona kombinatorycznie, oparta na głębokiej i żmudnej analizie słów. Niektóre wyniki Rozdziału 2 pochodzą z pracy magisterskiej autorki *Struktura i własności monoidów oraz algebr Hecke-Kiselmana*, nagrodzonej w konkursie *Krok w przyszłość* na najlepszą pracę studencką z matematyki w 2018 roku. Rezultaty te zostały włączone do pracy (współautorskiej z promotorem), opublikowanej w renomowanym czasopiśmie *Communications in Contemporary Mathematics*. Głównym wynikiem tego rozdziału jest Twierdzenie 2.44, o pewnym skończonym ciągu ideałów monoidu C_n, którego faktory zawierają ko-skończone półgrupy macierzowego typu. Tym półgrupom macierzowego typu poświęcony jest paragraf 2.4, w którym wykazano, że ich algebry półgrupowe są pierwsze (Twierdzenie 2.52).

Rozdział 3 poświęcony jest opisowi struktury algebr Hecke-Kiselmana nad ciałem K. Udowodniono, że algebra wyznaczona przez zorientowany cykl dowolnej długości $n \geqslant 3$ jest półpierwsza, obustronnie noetherowska i spełnia tożsamość wielomianową. Wykazano, że jej klasyczny pierścień ułamków jest skończonym produktem algebr macierzy nad ciałem funkcji wymiernych $K(x)$. Rozważono również przypadek ogólny algebry Hecke-Kiselmana, stowarzyszonej z zorientowanym grafem w sytuacji, gdy ta algebra spełnia tożsamość wielomianową.

Zagadnienie noetherowskości algebr Hecke-Kiselmana stowarzyszonych z grafami zorientowanymi badane jest w Rozdziale 4. Autorka otrzymała bardzo ładną charakteryzację (Twierdzenie 4.2) orzekającą, że algebry te są jednostronnie noetherowskie wtedy i tylko wtedy, gdy spójne składowe grafu są albo zorientowanymi cyklami, albo grafami acyklicznymi.

Rozdział 5 dotyczy opisu nieprzywiedlnych reprezentacji algebr Hecke-Kiselmana nad ciałami algebraicznie domkniętymi w przypadku, gdy algebry spełnianiają tożsamość wielomianową. Jest to równoważne brakowi w grafie wyznaczającym algebrę dwóch różnych zorientowanych cykli połączonych zorientowaną ścieżką. Podstawowym krokiem jest opis reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $K[C_n]$. Istotną rolę odgrywa tu wspomniane wyżej strukturalne Twierdzenie 2.44, pozwalające na wyróżnienie nieprzywiedlnych reprezentacji pochodzących od reprezentacji faktorów zawierających ko-skończone półgrupy macierzowego typu. Pozostałe reprezentacje pochodzą od idempotentów monoidu C_n. Wyznaczenie tych idempotentów okazało się niebanalnym zadaniem kombinatorycznym. W paragrafie 5.4 autorka pokazuje również, że wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje algebry Hecke-Kiselmana stowarzyszonej z grafem Θ są wyznaczone przez reprezentacje algebr stowarzyszonych ze spójnymi składowymi podgrafu Θ' powstałego przez usunięcie wszystkich strzałek nie zawartych w żadnym cyklu grafu Θ.

W Rozdziale 6 doktorantka analizuje wymiar Gelfanda-Kiryłowa algebr Hecke-Kiselmana. Algebry te należą do klasy algebr automatowych, których wymiar jest albo liczbą całkowitą, albo jest nieskończony. W głównym Twierdzeniu 6.12, autorka dowodzi, że dla algebr stowarzyszonych z grafami bez dwóch różnych cykli połączonych zorientowanymi ścieżkami, wymiar ten jest sumą długości pewnych szczególnych ścieżek w grafie i liczby jego cyklicznych podgrafów. Zależy więc bezpośrednio od pewnych liczbowych niezmienników grafu wyznaczającego algebrę. Dowód tego faktu jest kombinatorycznie złożony, z istotnym udziałem baz Gröbnera.

Rozdział 7 dotyczy zagadnienia tożsamości półgrupowych w HK-monoidach. Autorka potwierdziła w klasie HK monoidów starą hipotezę, że jeśli algebra półgrupowa $K[S]$ nad ciałem K spełnia tożsamość wielomianową, to półgrupa spełnia nietrywialną tożsamość półgrupową. Wykazała więcej, że algebra Hecke-Kiselmana nad ciałem jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy wyznaczający ją HK monoid spełnia tożsamość półgrupową.

W ostatnim Rozdziale 8 autorka wyjaśnia szczegółowo główne rezultaty pracy na przykładzie algebr stowarzyszonych z cyklami trójkątnymi oraz cyklami długości 4. Opisuje strukturę monoidów C_3 i C_4 oraz nieprzywiedlne reprezentacje algebry $K[C_3]$. Pokazuje jawną postać tożsamości półgrupowej spełnionej w C_3. Ponadto wyznacza centrum algebry $K[C_3]$, co jest dość skomplikowanym kombinatorycznie zadaniem.

Ocena.

Poziom naukowy przedłożonej rozprawy oceniam bardzo wysoko. Uważam, że doktorantka wniosła istotny wkład do poznania struktury monoidów Hecke-Kiselmana i ich algebr półgrupowych nad ciałami. Końcowy efekt rozprawy zależy od wyników autorki ze znakomitej pracy magisterskiej, oraz od rezultatów innych autorów, w tym twierdzeń o algebrach Hecke-Kiselmana, uzyskanych stosunkowo niedawno w grupie skupionej wokół profesora J. Oknińskiego. Autorce udało się przedstawić w sposób klarowny i precyzyjny niezbędną wiedzę z teorii pierścieni nieprzemiennych, teorii półgrup i ich reprezentacji, co bardzo ułatwia śledzenie dowodów. Liczne komentarze natury syntetycznej, zwracające uwagę czytelnika na trudności jakie były do pokonania i jakie rezultaty są przełomowe dla uzyskania głównych twierdzeń, w sposób istotny podnoszą jakość rozprawy. Nie mam wątpliwości, że autorka wykazała się głęboką wiedzą z teorii półgrup i algebr półgrupowych oraz umiejętnością wykorzystania tej wiedzy do rozwiązania trudnych zadań badawczych. Dowody prezentowanych rezultatów mają zróżnicowany stopień trudności. W większości są jednak skomplikowane technicznie i nasycone kombinatoryką. Ich czytelne, a jednocześnie dostatecznie formalne przedstawienie wymagało zatem znacznego wysiłku. Praca, w zakresie prezentacji dowodów, jest bardzo dobrze i przejrzyście zredagowana. Zawiera liczne komentarze wartościujące uzyskane wyniki i odniesienia do badań innych autorów. Rozprawa jest w całości bardzo starannie zredagowana. Jej lekturę ułatwiłoby znacznie dodanie skorowidzu pojęć oraz używanych symboli.

Wyniki wchodzące w skład rozprawy stały się podstawą artykułów naukowych, opublikowanych w renomowanych czasopismach. Pani mgr Wiertel jest autorką bądź współautorką 4 publikacji (wg. bazy MathSciNet na dzień 7 lipca 2023) po jednej w *Communications in Contemporary Mathematics*, *Algebras and Representation Theory*, *Linear Algebra and its Applications*, oraz *Forum Mathematicum*.

W mojej ocenie poziom naukowy oraz redakcja pracy, świadcząca o głębokiej wiedzy i umiejętnościach doktorantki, rekomendują rozprawę do **wyróżnienia**.

Podsumowanie.

Artykuł 187 ust.1 i 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. **Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce** stwierdza, że *Rozprawa doktorska prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w dyscyplinie albo dyscyplinach oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej* *lub artystycznej* oraz *Przedmiotem rozprawy doktorskiej jest oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, oryginalne rozwiązanie w zakresie zastosowania wyników własnych badań naukowych w sferze gospodarczej lub społecznej albo oryginalne dokonanie artystyczne.* Nie mam wątpliwości, że przedłożona rozprawa spełnia te warunki. Przedstawione rezultaty są wartościowe i ciekawe dla specjalistów. Autorka wykazuje też, że potrafi się swobodnie posługiwać dość szerokim spektrum metod oraz głęboką wiedzą z teorii półgrup pierścieni nieprzemiennych. Uważam, że rozprawa doktorska spełnia, a nawet wykracza ponad wszystkie ustawowe warunki i uzasadnia nadanie magister Magdalenie Wiertel stopnia naukowego doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka. Wnoszę o jej przyjęcie oraz dopuszczenie kandydatki do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

Piotr Grzeszczuk

Piotr Grzeszczuk