Wrocław, dn. 17.09.20

dr hab. inż. Jacek Małecki
Wydział Matematyki
Katedra Matematyki
Politechnika Wrocławska

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Łukasza Treszczotko „Functinal limit theorems related to particle systems".

Rozprawa doktorska mgra Łukasza Treszczotko powstała pod opieką dr hab. Anny Talarczyk-Noble. Została napisana w języku angielskim, liczy 132 strony i składa się z 5 rozdziałów zawartych w dwóch częściach. W części pierwszej w sposób ogólny przedstawia on główne wyniki swojego doktoratu podając ich tło historyczne, główne idee stojące za badanymi problemami oraz wprowadza pojawiające się w pracy pojęcia, obiekty i twierdzenia. W drugiej części rozprawy znajdziemy trzy kolejne rozdziały odnoszące się już bezpośredni do uzyskanych wyników oraz ich dowodów. Odwzorowują one rezultaty z trzech publikacji mgra Łukasza Treszczotko, z których dwie zostały opublikowane, zaś jedna ma status preprintu umieszczonego w internetowym repozytorium arXiv. Warto podkreślić, że wszystkie wspomniane prace są samodzielne. Tematycznie rozprawa obejmuje zagadnienia związane z funkcjonalnymi twierdzeniami granicznymi dla pewnej klasy układów cząstek.

Przejdę teraz do omówienia wyników uzyskanych przez mgra Treszczotko z zachowaniem podziału na wspomniane trzy części.

Punktem wyjścia dla rozważań przeprowadzonych w rozdziale trzecim rozprawy są układy cząstek postaci $(x^j + \xi_t^j)_{j\in\mathbf{N}}$, gdzie pozycje początkowe układu $(x^j)_{j\in\mathbf{N}}$ zadane są przez losową miarę Poissona z intensywnością będącą miarą Lebesgue'a i są one niezależne od układu $(\xi_t^j)_{j\in\mathbf{N}}$ niezależnych procesów α-stabilnych, gdzie $\alpha \in (0,2)$. Na bazie tychże procesów definiowany jest następnie proces

$$\xi_t^T := \frac{1}{T}\sum_{j_1\neq j_2} \sigma_{j_1}\sigma_{j_2} \left\langle \Lambda(x^{j_1}+\xi^{j_1}, x^{j_2}+\xi^{j_2}; T), \mathbf{1}_{[0,T]}\right\rangle, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

gdzie $(\sigma_j)_{j\in\mathbf{N}}$ są niezależnymi (między sobą i od $(x^j+\xi^j)$) zmiennymi losowymi o rozkładzie dwupunktowym. Pojawiający się powyżej *self-intersectional local time* (2-SILT) procesów ρ^1, ρ^2 jest funkcjonałem zadanym formalnie przez

$$\left\langle \Lambda(\rho^1,\rho^2;T), \varphi\right\rangle = \iint_{[0,T]^2} \varphi(\rho_u^1)\delta_0(\rho_u^2-\rho_v^1)dudv, \quad \varphi\in\mathcal{S}. \tag{2}$$

Motywacją do podjęcia przez doktoranta badań są wyniki pracy [8], w której pokazano, że proces ξ_t^T jest dobrze zdefiniowany, posiada ciągłą modyfikację oraz zbiega do *procesu*

Rosenblatta, gdy $T \to \infty$. We wspomnianej pracy nakreślono także dwie możliwe drogi rozszerzenia tego rezultatu (podrozdziały 5.2 i 5.3 w [8]) i właśnie tym zajmuje się mgr Łukasz Treszczotko w omawianej części swojego doktoratu.

Pierwsze rozszerzenie dotyczy zamiany granicznego procesu na przypadek *niesymetrycznego procesu Rosenblatta z parametrami* (α, β), $2 > \beta > \alpha > 0$ przez rozważanie

$$\eta_t^T = \frac{1}{T} \sum_{j_1 \neq j_2} \sigma_{j_1} \sigma_{j_2} \iint_{[0,t]^2} \mathbf{1}_{[0,T]}(x^{j_1} + \xi_u^{j_2}) \frac{dudv}{|x^{j_2} + \xi_v^{j_2} - x^{j_1} - \xi_u^{j_1}|}$$

w miejsce (1). Doktorant pokazuje, że tak zadany proces jest dobrze zdefiniowany (powyższy szereg jest zbieżny) i posiada ciągłą modyfikację (Proposition 3.2.1), a następnie dowodzi, że gdy $T \to \infty$, to proces (η_t^T) zbiega do niesymetrycznego procesu Rosenblatta z parametrami (α, β), o ile $1 > \beta > \alpha > 0$ i $\alpha + \beta > 1$ (Theorem 3.2.2). Dowody obu wyników podążają dokładnie tym samym schematem, który został zaproponowany w pracy [8] (i częściowo w [11]). Najtrudniejszym elementem wydaje się być wybór odpowiedniej niesymetrycznej modyfikacji procesu ξ_t^T tak, aby owy schemat zadziałał i w wyniku dał rzeczony niesymetryczny proces Rosenblatta.

Drugie rozważane rozszerzenie wyników pracy [8] dotyczy zastąpnia 2-SILTu (2) przez jego uogólnienie dla większej ilości procesów $\rho^1, \ldots, \rho^k$, $k \geq 2$, tzw. k-SILT formalnie zadane przez

$$\left\langle \Lambda^{(k)}(\rho^1, \ldots, \rho^k; T), \varphi \right\rangle = \iint_{[0,T]^k} \varphi(\rho_{u_1}^1) \delta_0(\rho_{u_2}^2 - \rho_{u_1}^1) \ldots \delta_0(\rho_{u_k}^k - \rho_{u_1}^1) du_1 \ldots du_k, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{3}$$

Idea samoprzecięciowych czasów lokalnych wyższych rzędów pochodzi z pracy A. Talarczyk [44]. Ł. Treszczotko adaptuje tę ideę i dowodzi, że dla dowolnego naturalnego $k \geq 2$ oraz $\alpha \in (1 - k^{-1}, 1)$ proces

$$\frac{1}{T^{k/2}} \sum_{j_1 \neq \ldots \neq j_k} \sigma_{j_1} \ldots \sigma_{j_k} \left\langle \Lambda^{(k)}(x^{j_1} + \xi^{j_1}, \ldots, x^{j_k} + \xi^{j_k}; T), \mathbf{1}_{[0,T]} \right\rangle, \quad t \geq 0,$$

jest dobrze zdefiniowany, posiada ciągłą modyfikację i jest zbieżny do k-procesu Hermite'a Z_H^k z wykładnikiem Hursta $H = 1 - (1 - \alpha)k/2$ (Theorem 3.2.3). Także w tym przypadku podąża scieżką dowodową nakreśloną w pracy [8], choć trzeba przyznać, że napotyka w tym przypadku dużo większe problemy techniczne. Dodatkowo zmienia on sposób identyfikacji procesu granicznego.

Wyniki zawarte w rodziale czwartym doktoratu rozpoczyna rezultat dla szerszej klasy układów cząstek. Po pierwsze dopuszcza się ogólniejsze procesy opisujące ruch cząstek. Dokładniej są to symetryczne procesy Lévy'ego zadane przez miare Lévy'ego postaci $f(x)|x|^{-1-\beta}dx$ dla pewnej wolno zmieniającej się w nieskończoności funkcji f. Po drugie doktorant bada przypadek, gdy wagi przypisane do poszczególnych cząstek (niezależne o tym samym rozkładzie) mają ciężkie ogony. Rozszerzając wyniki i idee zawarte w pracy [12] Ł. Treszczotko rozważa proces

$$G_t^T := \frac{1}{F_T} \sum_j z_j \int_0^{D_T t} \phi(C_T x^j + \eta_u^j) du, \quad t \geq 0,$$

dla pewnego konkretnego wyboru funkcji normujących C_T, D_T, F_T zależnego od miary Lévy'ego procesu η^1 oraz gęstości rozkładu wag z^1. Funkcja ϕ pojawiająca się powyżej jest funkcją klasy $L^1(\mathbf{R})$ o własności $\int_{\mathbf{R}} \phi(x)dx \neq 0$. W Theorem 4.6.1 pokazano zbieżność powyższego procesu (według rozkładów skończenie wymiarowych oraz w $\mathcal{C}[0,\infty)$ przy dodatkowych założeniach) do

$$K\left(\int_{\mathbf{R}} \phi(x)dx\right) X,$$

gdzie K jest pewną dodatnią stałą. Pojawiający się w granicy proces X należy do klasy procesów posiadających reprezentacje całkowe, w której całkuje się czas lokalny symetrycznego procesu β-stabilnego względem symetrycznej α-stabilnej miary losowej, gdzie α odnosi się do zachowania ogona rozkładu ładunków. Wynik ten jest elegancki i ogólny, zaś otrzymane procesy graniczne są przedmiotem aktualnych badań (zob. [35]). Jak łatwo widać, przypadek funkcji spełniających $\int_{\mathbf{R}} \phi(x)dx = 0$ wymaga modyfikacji normowań, aby w efekcie otrzymać nietrywialną granicę. W badaniu tego przypadku doktorant spowrotem zawęża klasę rozważanych procesów do niezależnych symetrycznych β-stabilnych procesów Lévy'ego, $\beta \in (1,2)$, oraz zakłada odpowiednio szybki zanik funkcji ϕ w nieskończoności. W Theorem 4.6.2 dowodzi on odpowiedniej zbieżności, ale tym razem obiektem granicznym są procesy $X^{\alpha,\beta,\gamma}$ o bardziej skomplikowanej reprezentacji całkowej (4.1.2) z $\gamma = 2$, które zostały wprowadzone uprzednio w [35]. Na koniec rozważany jest przypadek funkcji ϕ o ciężkich ogonach. Tutaj założenia dotyczące zarówno funkcji ϕ, jak i gęstości rozkładów ładunków są bardziej szczegółowe, ale w granicy udało się otrzymać nowe przykłady samopodobnych procesów o stacjonarnych przyrostach (*H-sssi processes*).

Rozdział 5. omawianej dysertacji poświęcony jest procesom $X^{\alpha,\beta,\gamma}$ o reprezentacji całkowej (4.1.2) indeksowanych parametrami α, β i γ, przy czym główny celem jest poluzowanie warunku $\gamma = 2$ zakładanego wczesniej w [35] oraz rozdziale 4 doktoratu. Dokładniej mgr Łukasz Treszczotko otrzymuje tego typu procesy jako obiekty graniczne, jednak użyte do tej aproksymacji procesy maja inny niż poprzednio charakter. Przedstawiona konstrukcja bazuje na spacerze losowym na kracie $\mathbb{Z}$, z punktami której stowarzyszone są w sposób niezależny zmienne losowe $(\xi_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ modelujace wygraną (lub stratę) w momencie wizyty w danym punkcie. Dodatkowa losowość rozważanego modelu pochodzi od niezależnych zmiennych losowych $(Y_i)_{i\in\mathbf{N}}$, które modelują wielkość wygranej lub straty w momencie k-tej wizyty w danym punkcie kraty. Całkowita wartość wygranych (strat) w danej chwili czasu t zadana jest w tym modelu przez proces

$$Z(t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k=1}^{N_{[t]}(x)} Y_k \right) \xi_x,$$

gdzie $N_n(x)$ jest ilością wizyt wyjściowego spaceru losowego w punkcie x do chwili n. Dodatkowo zakłada się, że wyjsciowy spacer losowy, (oraz ciągi (ξ_x), (Y_k)) są w normalnym obszarze przyciągania symetrycznego rozkładu β-stabilnego (odpowiednio α i

γ-stabilnego). Biorąc niezależne kopie powyższego procesu definiowany jest proces

$$G_n(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{b_n} Z_n^{(i)}(t), \quad n \geq 1$$

dla pewnych ciągów normujących (a_n) i (b_n). W Theorem 5.2.2 pokazano, że przy pewnym technicznym warunku na rozkłady (Y_k) danym w (5.2.6) zachodzi zbieżność procesu G_n (w sensie rozkładów skończenie-wymiarowych) do $X^{\alpha,\beta,\gamma}$, o ile $0 < \alpha < \gamma \leq 2$. Jego dowód, ogólnie rzecz biorąc, polega na pokazaniu zbieżności funkcji charakterystycznej i w dużej mierze podąża schematem użytym uprzednio w [15].

Łukasz Treszczotko w swoim doktoracie rozważa zagadnienia związane z ważną i ciągle rozwijaną tematyką, stanowiącą część ogólnej teorii procesów stochastycznych. Badania zbieżności różnej natury obiektów związanych z niezależnymi układami cząstek są prowadzone od wielu lat i owocowały wieloma wybitnymi wynikami. W mojej ocenie rezultaty doktoranta mają swoją wagę i uzupełniają naszą wiedzę w tym zakresie, choć oczywiście na tym etapie trudno ocenić ich realny wpływ na dalszy rozwój tej tematyki. Jak przyznaje sam autor, motywacją do szukania reprezentacji procesu jako granicy związanej z układem cząstek jest lepsze zrozumienie natury rozważanych procesów granicznych. Muszę jednak przyznać, że zabrakło mi w rozprawie dyskusji przykładów (nawet luźno związanych z rozważanymi obiektami), w których tego typu wynik byłby wykorzystany do wyznaczenia jakiś głębszych własności procesów granicznych. Chciałbym jednak podkreślić, że abstrahując od ewentualnych zastosowań, wyniki dotyczące zbieżności są dla mnie ciekawe same w sobie. Odnosząc się do rezultatów pierwszej części rozprawy zawartych w rozdziale trzecim, należy stwierdzić, że są to wyniki rozszerzające znane rezultaty przez adaptację ich dowodów do ogólniejszych przypadków. Nie jest to bynajmniej zarzut, ponieważ gro prac matematycznych ma taki charakter, wliczając w to także niektóre prace piszącego te słowa. Wydaje się to również naturalna i najbardziej odpowiednia droga do wprowadzenia młodego naukowca w zaawansowaną i aktualną tematykę badawczą. Wyniki kolejnego rozdziału są w mojej ocenie najciekawsze i stanowią uzupełnienie bardzo aktualnych i ważnych badań. Autor wykazał się dużą biegłością zarówno na poziomie operowania pojęciami, jak i dowodzenia technicznych lematów, dzięki czemu zdołał pokonać wiele problemów, które napotkał na swojej drodze. Mam nadzieję, że uda mu się je opublikować w odpowiednio renomowanym czasopiśmie. Wynik zaprezentowany w ostatnim rozdziale stanowi ładne domknięcie rozważań przeprowadzonych w poprzednich częściach rozprawy. Należy docenić, że autorowi udało się w pewnym stopniu domknąć założony program badań, pomimo, że wymagało to od niego zupełnie odmiennego podejścia metodologicznego, niż to miało miejsce w poprzednich rozdziałach.

Rozprawa doktorska jest napisana starannie, choć znajdują się w niej pewne usterki, głównie redakcyjne i nie wpływające na meritum, których listę załączam do niniejszej recenzji. Autor z jednej strony zamieścił obszerny wstęp wprowadzający do rozważanej tematyki, z drugiej strony w każdym z rozdziałów stara się bezboleśnie przeprowadzić czytelnika przez często techniczne dowody. Jako osoba niepracująca na co dzień w tej

tematyce doceniam dbałość doktoranta o łagodne wprowadzenie czytelnika w rozważane zagadnienia i myślę udaną próbę klarownego przedstawienia swoich rezultatów ich dowodów. Czytając dysertację nie znalazłem błędów w rozumowaniach.

Łukasz Treszczotko jest autorem 5 prac, z których 4 są pracami samodzielnymi, a wyniki 3 z nich wchodzą w skład niniejszej rozprawy. Dwie prace wchodzące w skład rozprawy zostały opublikowane w czasopismach *Stochastics and Dynamics* oraz *Elelctronic Communications in Probability*. Doktorant otrzymał także grant Narodowego Centrum Nauki w konkursie Preludium w 2017 roku.

Uważam, że rozprawa doktorska mgr. Łukasza Treszczotko spełnia wymagania ustawowe zawarte w Ustawie z dn. 14 marca 2003r. „O stopniach i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki". Spełnia ona także wymagania zwyczajowe. W związku z powyższym wnioskuję o dopuszczenie mgra Łukasza Treszczotko do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

Wybrane pozycje z bibliografii zawartej w rozprawie

[8] T. Bojdecki, L.G. Gorostiza, A. Talarczyk
From intersection local time to the Rosenblatt process,
J. Theor Probab, 28 (3), p. 1227-1249, 2015

[11] T. Bojdecki, A. Talarczyk
Particle picture approach to the self-intresection local time of the density process in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, Stoch. Process. Their Appl. 115 (42), p. 449-479 (2005)

[12] T. Bojdecki, A. Talarczyk
Particle picture interpretation of some Gaussian processes related to fractional Brownian motion,
Stoch. Process. Their Appl. 122 (5), p. 2134-2154 (2012)

[15] C. Dombry, N., Guillotin-Plantard
Discret approximation of a stable self-similar tsationary increments process,
Bernoulli 52 (2), p. 183-209 (1994)

[35] P. Jung, T. Owada, G. Samorodnitsky
Functional central limit theorem for negatively dependent heavy-tailed stationary infinitely divisible processes generated by conservative flows,
Ann. Probab. 45 (4), p. 2087-22130 (2017)

[35] T. Owada, G. Samorodnitsky
Functional central limit theorem for heavy-tailed stationary infinitely divisible processes generated by conservative flows,
Ann. Probab. 43 (1), p. 240-285 (2015)

[44] A. Talarczyk
Self-intersection local time of order k for Gaussian processes in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$,
Stoch. Process. Their Appl. 96, p. 11-72 (2001)

Załącznik

Lista uwag redakcyjnych

s.5 l. -12 Powinno być „α-stable".

s.6 l. 20 Powinno być „Lévy".

s.6 l. -3 Powinno być „stable".

s.8 l. 3 Powinno być „Lévy".

s.12 l.-8,-7 „on" $\rightarrow$ „one", „prozess" $\rightarrow$ „process".

s.15 l.-3 Powinno być „related".

s.20 l. -9 Za dużo o jedno „for".

s.22 l. 11 Brakuje nawiasu zamykającego.

s.24 l. 5 Brakuje dz z prawej strony równości oraz jest błędny zapis indykatorów zbiorów.

s.25 l. -3 Usunąć $\in$.

s.27 l.-1 Powinno być α-stable. Analogicznie w kolejnej linii.

s.28 l. 5 powinno być „Section"

s.32 l. 9 Za dużo o jedno „a".

s.34 l.14 Zamiast f powinno być ϕ.

s.35 l.-8 Nagle z przypadku d-wymiarowego robi się przypadek jednowymiarowy.

s.37 l.-12 Za dużo o jedno „and".

s.51 l.-6 Za dużo o jedno „with".

s.52 l.-4 Powinno być „stable".

s.55 l.-7 Powinno być „Recall".

s.60 l.-4 Powinno być g_j.

s.70 l.12 Powinno być „ presentation of the processes".

s.72 l.-9 Zamiast sx powinno być dx.

s.74 l.-5 Brakuje odstępu.

s.76 l.-10 Nie chodzi o zbieżność ψ, ale wykładnika przeskalowanego ψ_T.

s.78 l. -17 Powinno być „the".

s.79 l. 8 Powinno być „form".

s.79 l. 18 Brakuje odstępu.

s.81 l.-3 Powinno być „obtained".

s.83 l.-5 Zbędny dwukropek.

s.86 l. 3 Czy jedna z całek nie powinna być po zbiorze $[0, t-s]^k$? Uwaga dotyczy także rozumowania poniżej.

s.87 l.-6 Nie zgadza się wymiar obszaru całkowania z wymiarem całki.

s.90 l.13 Można skrócić rozumowanie korzystając z nierówności między momentami.

s.97 l.-9 Brakuje dy.

s.97 l.-2 Do skończoności I_1^T potrzebne jest także (4.6.5).

s.101 l.6 Powinno być „provide".

s.107 l.7 Chyba jednak dowód nie został pominięty.

s.130 l.-12 Powinno być 45(4).