Uniwersytet Wrocławski

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

INSTYTUT MATEMATYCZNY
pl. Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław

tel. +48 71 375 74 01 | +48 71 328 07 17

dyrekcja@math.uni.wroc.pl | www.math.uni.wroc.pl

Prof. dr hab. Jacek Dziubański
e-mail: jdziuban@math.uni.wroc.pl
tel. 713757449

Wrocław, 20 lutego 2019.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Krystiana Kazanieckiego "Analytic properties of operators on the non-reflexive spaces of smooth functions"

Rozprawa doktorska mgr. Krystiana Kazanieckiego powstała pod opieką dr. hab. Michała Wojciechowskiego. Napisana została w języku angielskim i liczy łącznie 73 strony plus: stronę tytułową, spis treści, streszczenie. Sama rozprawa podzielona jest na 5 rozdziałów, z których pierwszy stanowi wstęp, a pozostałe cztery prezentują tezy dysertacji. Przeprowadzone w pracy doktorskiej badania dotyczą analizy pewnych przestrzeni funkcyjnych i operatorów działających na tych przestrzeniach. Tak więc dysertacja łączy w sobie analizę matematyczną, analizę funkcjonalna i harmoniczną, teorię przestrzeni funkcyjnych.

Przejdę teraz do omówienia głównych wyników rozprawy.

Motywacją rozdziału drugiego doktoratu jest pytanie o warunki na operatory różniczkowe $T_1, T_2, ..., T_\ell$ na $\mathbb{R}^d$ o stałych współczynnikach przy których zachodzi następujące oszacowanie dla funkcji $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$(0.1) \qquad \|T_1 f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \lesssim \sum_{j=2}^{\ell} \|T_j f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

W przypadku dwóch operatorów T_1 i T_2 o tej samej jednorodności i wzięciu w (0.1) zamiast normy L^1 normę L^p, $1 < p < \infty$, teoria Calderóna-Zygmunda, a w szczególności twierdzenie mnożnikowe Hörmandera pozwala badać to zagadnienie. Jednak graniczny przypadek $p = 1$ jest odmienny. Dla operatorów jednorodnych tego samego stopnia praca Ornsteina z 1962 roku orzeka, że nierówność (0.1) (z normą L^1) ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy T_1 jest liniową kombinacją pozostałych operatorów $T_2, T_3, ..., T_\ell$. Celem tej części rozprawy jest udowodnienie twierdzenia Ornsteina w przypadku, gdy operatory różniczkowe T_j pozostają nadal jednorodne, jednak względem pewnej nieizotropowej rodziny dylatacji na $\mathbb{R}^d$. Takie operatory nazywa się pracy Λ-*homogeneous*. Tak więc klasyczne rzędy różniczkowań ∂^α (występujące w operatorach T_j) mogą być różne, zakłada się jedynie, że mają tę samą parzystość. Twierdzenie udowodnione w dysertacji rozszerza znacznie zakres rozważanych operatorów $T_1, T_2, \ldots, T_\ell$. Aby je udowodnić, ze wszystkimi możliwymi wielowskaźnikami α występującymi w T_j, $j = 1, \ldots, \ell$, wiąże się przestrzeń Hilberta E skończonego wymiaru, by na niej zdefiniować jednorodną stopnia jeden funkcję Bellmana $\mathbf{B}$, powiązaną z nierównością (0.1). Następnie, przy założeniu (0.1), dowodzi się własności funkcji $\mathbf{B}$, a w szczególności quasi wypukłości, która odgrywa kluczową rolę w dowodzie nieizotropwej wersji twierdzenia Ornsteina. Nie sposób w tym miejscu choćby w zarysie opisać pełnego dowodu. Jednak muszę podkreślić, że został on bardzo dobrze przedstawiony w dysertacji i przeczytałem go z dużym zainteresowaniem.

Wyniki tego rozdziału ukazały się w formie artykułu we wspólnej pracy doktoranta z Dmitriy M. Stolyarovem i Michałem Wojciechowskim *Anisotropic Ornstein noninequalities* w Analysis and PDE, 10(2) (2017), 351–366. Jest to bardzo dobre czasopismo, dokonujące starannej selekcji i dbające o wysoki poziom drukowanych w nim prac.

Trzeci rozdział rozprawy doktorskiej poświęcony jest operatorom mnożnikowym Fouriera, które działają na jednorodnej przestrzeni Sobolewa $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d)$. Problem mnożników fourierowskich dotyczy podania warunków na funkcję m, zdefiniowaną na $\mathbb{R}^d$, aby operator

$$f \mapsto T_m f = \mathscr{F}^{-1}(m\mathscr{F}f)$$

był ograniczony z przestrzeni funkcyjnej X do przestrzeni funkcyjnej Y. Oczywiście należy najpierw sprecyzować, co się rozumie przez transformatę Fouriera $\mathscr{F}f$ elementu f. Zwykle chodzi o uzyskanie oszacowań na gęstej klasie, na przykład $\mathscr{S}$ lub $L^2 \cap X$. O ile przypadek, gdy X jest przestrzenią L^p, $1 < p < \infty$, lub przestrzenią Hardy'ego H^p, $0 < p \leq 1$, był intensywnie badany, a twierdzenia mnożnikowe Marcinkiewicza czy Hörmandera należą do klasyki rzeczywistej analizy harmonicznej, o tyle wiedza na temat mnożników Fouriera na przestrzeniach Sobolewa, budowanych na bazie przestrzeni L^1, jest bardzo skromna. W roku 1987 A. Bonami i S. Poornima w Journal of Functional Analysis opublikowały wynik, który mówi, że operator mnożnikowy o niestałym, ciągłym na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ i jednorodnym stopnia zero mnożniku, nie może być ograniczony na jednorodnej przestrzeni Sobolewa $\dot{W}_1^k$, gdzie k oznacza stopień gładkości. Jak piszą autorki, kluczowym punktem dowodu jest wersja (na przestrzeniach Sobolewa $\dot{W}_1^k$) wspomnianego wcześniej twierdzenia Ornsteina. Rozdział trzeci doktoratu rzuca więcej światła na temat ograniczoności operatorów mnożnikowych. Jego celem jest udowodnienie, że mnożnik m operatora T_m, ograniczonego na przestrzeni $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d)$, musi być funkcją ciągłą i ograniczoną na $\mathbb{R}^d$. W dowodzie twierdzenia wykazuje się na początku ciągłość mnożnika na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, by potem podzielić go na dwie części. W pierwszej, przy założeniu istnienia granic niemal radialnych w zerze mnożnika m, stosuje się twierdzenie Bonami i Poornimy. W części drugiej dowodu, tej bardziej złożonej, gdy zakłada się że granice niemal radialne nie istnieją, konstruuje się ciąg funkcji h_s spełniających $\|h_s\|_{\dot{W}_1^1} \leq C$, $\|T_m h_s\|_{\dot{W}_1^1} \to \infty$. Używa się do tego, w bardzo pomysłowy moim zdaniem sposób, produktów Riesza.

Wyniki tego rozdziału są wspólną pracą kandydata z M. Wojciechowskim, opublikowaną w cenionym w analizie harmonicznej czasopiśmie Annales de l'Institut Fourier.

W czwartym rozdziale rozprawy mgr. Krystiana Kazanieckiego badane są izomorfizmy, w normach L^1, pomiędzy podprzestrzeniami wielowymiarowych wielomianów trygonometrycznych, zdefiniowanych na nieskończonym produkcie $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$, a podprzestrzenią wielomianów trygonometrycznych na $\mathbb{T}^d$. Badania te są umotywowane artykułem Y. Meyera, opublikowanym w Annales Scientifiques École Normale Supérieure w 1968 roku. Główny wynik rozdziału wyrażę w pewnym uproszczeniu, przyjmując $d = 1$. Mówi on, że jeśli $A_n = [-r_n, r_n] \cap \mathbb{Z}$ a $|\tau_j|$ jest szybko rosnącym ciągiem, gdzie $\tau_j \in \mathbb{Z}$, to przyporządkowanie wielomianowi trygonometrycznemu postaci

$$\sum_{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots)\in A_1\times A_2\times A_3\times\ldots} a_\lambda e^{2\pi i\langle\lambda,x\rangle}$$

należącemu do $L^1(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ wielomianu

$$\sum_{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots)\in A_1\times A_2\times A_3\times\ldots} a_\lambda e^{2\pi i\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\tau_j x},$$

który należy do $L^1(\mathbb{T})$, jest L^1 izomorfizmem. Oczywiście występujące powyżej sumy mają skończoną liczbę składników, a wielowskaźniki λ mają skończenie wiele współrzędnych różnych od zera. Dalej, w podrozdziale 4.2, doktorant dokonuje analizy założeń o szybkim dążeniu do nieskończoności ciągu $|\tau_j|$, konstruując interesujący kontrprzykład. Chcę zauważyć, że przeprowadzona w nim analiza nie dowodzi, tak jak sugeruje tytuł podrozdziału, że podany warunek jest konieczny.

Ostatni, piąty rozdział dysertacji, bada własności operatora śladu Tr, z przestrzeni $W_1^1(\Omega)$ na brzeg $\partial\Omega$, dla obszarów $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Punktem wyjścia jest twierdzenie E. Gagliardo z 1957 roku, które orzeka, że dla obszaru Ω, o regularnym brzegu $\partial\Omega$, przyporządkowanie funkcji $f \in W_1^1(\Omega)$ jej "wartości brzegowej" $\mathrm{Tr}\, f$, po uprzednim zdefiniowaniu co się przez to rozumie, jest ograniczoną surjekcją na $L^1(\partial\Omega)$. Wynik J. Peetre z 1979 mówi, że w przypadku obszarów o regularnym brzegu, nie istnieje prawostronny liniowy i ciągły operator odwrotny, to znaczy, nie istnieje operator $S : L^1(\partial\Omega) \to W_1^1(\Omega)$, że $\mathrm{Tr} \circ S = I$. Rozdział piąty rozprawy doktorskiej rozpoczyna się od zaprezentowania bardzo błyskotliwego i eleganckiego dowodu tego twierdzenia. Polega on na podaniu rozumowania, że założenie o istnieniu operatora S wymusza istnienie włożenia nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha ℓ^2 w przestrzeń ℓ^1, co, jak wiadomo, jest niemożliwe. Dowód ten mógłby sam w sobie stanowić krótką publikację, jednak jest on jedynie przedsmakiem tego, co następuje dalej. Rozważa się bowiem operator śladu dla $W_1^1(\Omega_K)$, gdzie obszar $\Omega_K \subset \mathbb{R}^2$ jest śnieżynką (gwiazdką) Kocha, a więc obszarem z nieregularnym brzegiem. Definiuje się przestrzeń śladów $X(\Omega_K)$, jako uzupełnienie w odpowiedniej normie wartości brzegowych funkcji Lipschitza na $\mathbb{R}^2$. Głównym rezultatem tego rozdziału jest wykazanie, że dla operatora śladu $\mathrm{Tr} : W_1^1(\Omega_K) \to X(\Omega_K)$ istnieje prawostronny ciągły i liniowy operator odwrotny S. Ważnym elementem dowodu jest pokazanie, że jednorodna przestrzeń $\dot{X}(\Omega)$ jest izomorficzna z przestrzenią Arensa-Eelsa (przestrzenią molekularną na $\partial\Omega_K$ z odpowiednio zdefiniowaną metryką). Analiza przeprowadzona w tym rozdziale opiera się na specjalnym rozkładzie Whitney'a śnieżynki Kocha i powiązane z tym rozkładem drzewo. Nie czyta się go łatwo, z uwagi na złożoność przeprowadzanych tam konstrukcji. Muszę przyznać, że spędziłem nad jego analizą najwięcej czasu. Jestem pod dużym wrażeniem rozumowań i metod przedstawionych w tym fragmencie dysertacji. Myślę, że stanie się on motywacją do dalszych dociekań dotyczących pytania, gdzie przebiega granica i co decyduje, że dla pewnych obszarów Ω i przestrzeni $W_1^1(\Omega)$ nie istnieje, a dla pewnych istnieje prawostronny operator odwrotny do operatora śladu.

Przechodząc do podsumowania oceniam, że rozprawa doktorska mgr. Krystiana Kazanieckiego to bardzo dobra praca matematyczna. Zawiera oryginalne rozwiązanie kilku problemów naukowych, których opis zamieściłem powyżej. Rozwiązane w rozprawie zagadnienia nie są marginalne, wręcz przeciwnie, myślę że są ważne dla rozwoju dyscypliny. Rzucają one światło na obiekty badane w analizie harmonicznej, teorii przestrzeni funkcyjnych, teorii operatorów różniczkowych. Ich rozwiązanie wymagało dużej wiedzy i łączenia metod z kilku dziedzin matematyki: analizy funkcjonalnej, teorii przestrzeni Banacha, analizy fourierowskiej, rzeczywistej analizy harmonicznej, dyskretnej analizy. Jest to zrobione w dysertacji bardzo umiejętnie. Nie znaczy to, że czyta się ją łatwo. Wręcz przeciwnie, należy zachować dużą koncentrację. Wynika to ze złożoności rozwiązywanych w niej zagadnień i stosowanych narzędzi matematycznych. Pewne wyniki rozprawy doktorskiej zostały już opublikowane, jako prace wspólne, w renomowanych i uznanych czasopismach, a w świetle oświadczeń współautorów, wkład mgr. Krystiana Kazanieckiego jest znaczący i istotny. Sama rozprawa jest dobrze zredagowana. Przedstawione dowody nie są przegadane i jednocześnie dostatecznie szczegółowe. Jest jasne, co w danej chwili jest robione i do czego zmierza rozumowanie. Czytając rozprawę znalazłem jedynie kilka drobnych niedociągnięć, które są łatwo wychwytywane i korygowane przez starannie studiującego pracę czytelnika. Nie wpływają one na wysoką ocenę pracy. Ich listę przekazuję osobno doktorantowi, w celu dokonania korekt przed publikacją.

Konkluzja. Stwierdzam, że praca doktorska mgr. Krystiana Kazanieckiego spełnia wymagania Ustawy z dnia 14 marca 2003 roku O stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki, w tym także artykuł 13 Ustawy. Spełnia również wymagania zwyczajowe. Wnioskuję o dopuszczenie mgr. Krystiana Kazanieckiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z uwagi na wysoki poziom naukowy wyników, stawiam także wniosek o wyróżnienie rozprawy.

J. Dziubański

Prof. dr hab. Jacek Dziubański