wpłynęło 13.09.2018 r.
[illegible]

Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
Email: j.grytczuk@mini.pw.edu.pl

Warszawa, 1 czerwca 2018

Recenzja rozprawy doktorskiej Katarzyny Zając

Algorytmy kombinatoryczne i graficzne w spektralnej klasyfikacji skończonych bigrafów oraz sieciowych systemów pierwiastków

Rozprawa doktorska Katarzyny Zając dotyczy własności spektralnych grafów oznakowanych. Obiekty tego typu pojawiają się w rozmaitych kontekstach, od czystej teorii grafów do równań Diofantycznych czy reprezentacji algebr. Typowy problem polega na klasyfikacji określonej rodziny *bigrafów* ze względu na spektrum związanych z nimi macierzy (Grama, Coxetera etc.), oraz skonstruowaniu efektywnych algorytmów wyznaczających rozmaite parametry występujące w znalezionej klasyfikacji. Można więc uznać, że tematyka rozprawy leży na styku spektralnej teorii grafów, algebry i informatyki teoretycznej.

Grafem *oznakowanym* nazywamy graf, którego krawędzie zostały oznakowane dwoma znakami, plusem i minusem (na rysunkach odpowiednio linie przerywane i ciągłe). Badane w rozprawie grafy oznakowane mają dodatkowe ograniczenie wymagające jednolitości znaku na krawędziach wielokrotnych pomiędzy tą samą parą wierzchołków. Taki typ grafu oznakowanego nazywany jest *bigrafem* lub grafem *krawędziowo-dwudzielnym*. Przedmiotem rozprawy są własności spektralne bigrafów, a dokładniej problemy klasyfikacyjne ze względu na dwa typy podobieństwa, tzw. słabą i silną $\mathbb{Z}$*-kongruencję Grama*. Polega ona na $\mathbb{Z}$-podobieństwie związanych z bigrafami macierzy Grama (symetrycznej i niesymetrycznej) implikującym szereg pożądanych własności powiązanych obiektów, takich jak *spektrum Coxetera* bigrafu, czy jego *typ Dynkina*.

Główny wynik rozprawy (Twierdzenie 5.1) podaje pełną klasyfikację pewnej podklasy bigrafów ze względu na słabe $\mathbb{Z}$-podobieństwo (inaczej $\mathbb{Z}$*-kongruencję*). Elementami tej podklasy są bigrafy nieujemne *korangi* dwa, czyli takie, których symetryczna macierz Grama jest dodatnio półokreślona, a jej rząd jest o dwa mniejszy od wymiaru. W pierwszej części twierdzenia podano listę tzw. rozszerzonych *bigrafów Euklidesa*, na którą składają się dwie nieskończone rodziny oraz trzy szczególne bigrafy. Twierdzenie orzeka, że lista ta wyczerpuje wszystkie spójne bigrafy nieujemne (korangi dwa, bez pętli) z dokładnością do słabej $\mathbb{Z}$-kongruencji. Ponadto, w drugiej części twierdzenia dowiedziono, że słaba kongruencja takich bigrafów ma miejsce wtedy i tyko wtedy, gdy mają one ten sam *typ Dynkina* (jest to pewien diagram kodujący własności bigrafu). Dowód tego rezultatu jest dość złożony i trudny technicznie, wymagający dogłębnego zbadania rozszerzonych bigrafów Euklidesa oraz wyznaczenia związanych z nimi parametrów (tj. liczba i wielomian Coxetera, typ Dynkina etc.). Jego miłym uzupełnieniem jest konstrukcja algorytmu (Twierdzenie 5.28) znajdujacego dla zadanego bigrafu (spełniającego założenia Twierdzenia 5.1) macierz Grama odpowiedniego bigrafu

Euklidesa wraz z macierzą potwierdzającą ich $\mathbb{Z}$-kongruencję. Algorytm ten polega na wielokrotnym przekształcaniu (tzw. *inflacji*) zadanego bigrafu polegającym na odpowiednich zmianach znaków pomiędzy wybranymi parami wierzchołków. Dodatkowo w Twierdzeniu 5.50 oszacowano złożoność tego algorytmu mierzoną liczbą wykowanych operacji arytmetycznych.

W przypadku silnej $\mathbb{Z}$-kongruencji problem klasyfikacji jest oczywiście dużo trudniejszy i raczej należy oczekiwać, że uzyskanie podobnego rezultatu będzie dużo bardziej wymagające. Krokiem w tym kierunku jest Twierdzeniu 6.4, w którym znaleziono skończoną rodzinę trzynastu bigrafów reprezentujących wszystkie bigrafy (nieujemne, spójne, korangi dwa) na co najwyżej sześciu wierzchołkach, z dokładnością do silnej $\mathbb{Z}$-kongruencji. Ponadto wykazano, że dla bigrafów tej wielkości równość typów Coxetera-Dynkina implikuje ich silne $\mathbb{Z}$-podobieństwo. Dowód tego twierdzenia opiera się głównej mierze na obliczeniach komputerowych. Należy jednak podkreślić, że nie są to bynajmniej rutynowe sprawdzenia, lecz konstrukcje wymagające algorytmicznej pomysłowości ograniczającej w efekcie czas pracy komputera do rozsądnych granic. Autorka przedstawia szczegółowo przebieg eksperymentów podając, oprócz tradycyjnej analizy złożoności, także rzeczywisty czas pracy komputera. Kluczowym elementem metody stosowanej w problemie silnej $\mathbb{Z}$-kongruencji jest analiza geometrycznych własności pierwiastków bigrafów (pierwiastkiem bigrafu jest wektor całkowity dający wartość 1 po podstawieniu do funkcjonału Grama tego bigrafu). W Twierdzeniu 6.30 znajdujemy frapujący opis geometrycznej struktury orbit pierwiastków bigrafu (względem przekształcenia liniowego zadanego macierzą Coxetra bigrafu) w języku tzw. *kołczanów oczkowych* (są to specjalne grafy skierowane kodujące strukturę orbit), oraz związanych z nimi powierzchni. Opis ten dotyczy jedynie bigrafów z Twierdzenia 6.4, czyli rozmiaru co najwyżej sześć. Nasuwa się oczywiście naturalne pytanie, czy te wyniki da się rozszerzyć na bigrafy dowolnej wielkości, co zapewne jest już przedmiotem dalszych badań.

Omówione powyżej wyniki rozprawy nie wyczerpują jej niezwykle obfitej zawartości. Warto podkreślić, że większość materiału została już opublikowana w kilku artykułach, które ukazały się w wiodących czasopismach z algebry i kombinatoryki (np. *European Journal of Combinatorics*, *Linear Algebra and its Applications*, czy *Algebra and Discrete Mathematics*). Praca jest bardzo dobrze zredagowana, liczne przykłady, opisy i ilustracje pomagają zrozumieć niełatwe technicznie meritum zagadnienia. Bardzo dobrym pomysłem było umieszczenie w osobnym rozdziale historii problematyki. Być może dałoby się nieco uprościć prezentację rozprawy pod względem notacyjnym, czy też stylistycznym. Na przykład, zwrot "bez pętli" został użyty w tekście rozprawy ponad 300 razy. Może lepiej było napisać na początku, że rozważane będą bigrafy bez pętli o ile nie zaznaczymy inaczej.

Podsumowując uważam, że jest to bardzo ciekawa, solidna rozprawa doktorska w trudnej tematyce z pogranicza algebry, kombinatoryki i informatyki. Wnoszę zatem o dopuszczenie jej autorki, Katarzyny Zając, do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

J. Grytczuk

Jarosław Grytczuk