dr hab. Tomasz Adamowicz
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
email: T.Adamowicz@impan.pl

Warszawa, 24 stycznia 2018r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Katarzyny Mazowieckiej
"Singularities of harmonic and biharmonic maps into compact manifolds"

Rozprawa doktorska Pani Katarzyny Mazowieckiej została napisana pod opieką profesora Pawła Strzeleckiego i dotyczy osobliwości przekształceń harmonicznych i bi-harmonicznych pomiędzy rozmaitościami. Zagadnienia rozważane w rozprawie należą do geometrycznej analizy, która wyrasta z rachunku wariacyjnego, teorii układów równań eliptycznych oraz geometrii różniczkowej. Teoria przekształceń harmonicznych pomiędzy obszarami o niezerowej krzywiźnie jest dziedziną żywo rozwijającą się od ponad 50 lat, wkład do której mają matematycy tej klasy co Bethuel, Brezis, Eells, Fuglede, Gromov, Hardt, Jost, Lin, Riviere, Schoen, Struwe, Uhlenbeck, Wood, Yau. Zagadnienia, prezentowane w rozprawie, dotyczące osobliwości minimów oraz rozwiązań układów równań różniczkowych typu eliptycznego należą do najtrudniejszych w geometrycznej analizie. Uzyskanie nietrywialnych wyników w tej dziedzinie wymaga wysokich umiejętności technicznych (np.: nierówności wymagające oszacowań skomplikowanych wyrażeń różniczkowych), solidnej wiedzy z teorii przestrzeni Sobolewa a przede wszystkim wyobraźni i dobrego zrozumienia geometrii rozmaitości Riemannowskich. Przedłożona rozprawa dowodzi posiadania przez jej Autorkę wszystkich wymienionych umiejętności.

Materiał rozprawy został częściowo oparty na jednym opublikowanym artykule (rozdział 2):

Mazowiecka, Katarzyna; Strzelecki, Paweł, The Lavrentiev gap phenomenon for harmonic maps into spheres holds on a dense set of zero degree boundary data, *Adv. Calc. Var.* 10(3) (2017), 303–314.

Praca ukazała się w rzetelnym czasopiśmie, cenionym w środowisku równaniowym w Polsce i na świecie. Nieco na marginesie recenzji, ale nie bez związku z portretem naukowym Pani Mazowieckiej wspomnę, że jest ona współautorką jeszcze dwóch artykułów opublikowanych w dobrych czasopismach: *Math. Methods Appl. Sci.* oraz *NoDEA*. Ponadto Arxiv wskazuje na dwa kolejne manuskrypty ukończone przez Mazowiecką i współautorów w 2017r. Tematyka zarówno tych artykułów jak i manuskryptów nie dotyczy bezpośrednio doktoratu i nawiązuje do rozprawy jedynie kanwą przekształceń p-harmonicznych i harmonicznych. Świadczy to o szerokich zainteresowaniach matematycznych Katarzyny Mazowieckiej i jest dobrym prognostykiem jej dalszego rozwoju naukowego.

Opis pracy

Rozprawa jest napisana w języku angielskim, ma 89 stron: 79 stron głównego tekstu i 10 stron suplementu zawierającego szczegóły pewnych obliczeń. Bibliografia rozprawy liczy 58 pozycji. Praca podzielona jest na trzy rozdziały, suplement składa się z dwóch krótkich podrozdziałów.

Wstęp napisany jest zwartym, konkretnym językiem. Zawiera właściwe wprowadzenie do tematyki oraz niezbędne definicje. Na pochwałę zasługują bogate nawiązania do literatury przedmiotu. Dzięki nim czytelnik jasno dostrzega kto, kiedy i co udowodnił, oraz jak z tych wyników rozwinęło się opisywane zagadnienie i badany przez Autorkę problem. Dowodzi to bardzo dobrego zrozumienia studiowanej tematyki, jak również wskazuje na przemyślany wybór zagadnień i narzędzi. Jako drobną uwagę krytyczną podam brak sformułowania w rozdziale wprowadzającym (i w całej pracy) expressis verbis jednej z podstawowych definicji rozprawy, tj. stopnia przekształcenia. Ponadto w obliczeniach (1.2.5) należy wskazać zakres parametru k.

Przedmiotem badań opisanych w rozdziale 2 ("The Lavrentiev gap phenomenon for harmonic maps into spheres") są przekształcenia harmoniczne z kuli w $\mathbb{R}^3$ w sferę $\mathbb{S}^2$, rozwiązujące zagadnienie 2-Dirichleta przy zadanych gładkich danych brzegowych z klasy $C^\infty(\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^2)$. Główny wynik rozdziału to twierdzenie 2.0.1 orzekające o niestabilności osobliwości przekształceń harmonicznych przy założeniu, że dane brzegowe są stopnia zerowego. Dodatkowo udowodniono, że przy założeniach twierdzenia 2.0.1 zachodzi tzw. zjawisko Ławrentiewa. Wynik ten wyrasta z prac Bethuel–Brezis–Coron, Hardt–Lin i jest bezpośrednim wzmocnieniem wyników z pracy Almgren–Lieb. Dowód twierdzenia wynika z kilku obserwacji pomocniczych. Pierwszą z nich jest twierdzenie 2.1.3, którego dowód naszkicowano w pracy Almgren–Lieb, a który w rozprawie przedstawiony jest z pełnym, przekonywającym rozumowaniem wraz ze szczegółami pominiętymi w pracy Almgren–Lieb. Sedno dowodu twierdzenia 2.0.1 jest opisane w rozdziale 2.2 i polega na zręcznym połączeniu zmodyfikowanego pomysłu Hardt'a-Lin'a w celu konstrukcji zaburzonego przekształcenia brzegowego z metodą Almgren'a–Lieb'a instalowania nowych punktów osobliwych (lematy 2.2.5, 2.2.7 i 2.2.8). Rozdział 2.3 zawiera uogólnienie głównego wyniku na przypadek przekształceń brzegowych o dowolnym niezerowym stopniu (twierdzenie 2.3.1). Rozdział 2.4 i uwaga 2.4.1 poświęcone są zastosowaniu twierdzenia 2.0.1 do pokazania niejednoznaczności rozwiązań zagadnienia Dirichleta.

Wyniki rozdziału drugiego uważam za istotne i ciekawe. Ponadto, rozdział jest bardzo dobrze zredagowany: zawiera wprowadzenie dające szerszą perspektywę zagadnienia, wyraźnie zidentyfikowane są najtrudniejsze kroki dowodu twierdzenia 2.1.3. Wszystkie rozumowania w rozdziale przeprowadzone są z pietyzmem i troską o szczegóły. Rozdział kończy sformułowanie i dyskusja problemu otwartego.

Rozdział 3 ("Conditional boundary regularity for minimizing biharmonic maps") opisuje wyniki dla brzegowej regularności (minimalizujących) przekształceń bi-harmonicznych. Podobne zagadnienia dla przekształceń p-harmonicznych (w tym, dla $p = 2$) zostały zbadane w pracach Shoen–Uhlenbeck, Hardt–Lin oraz Fuchs. Brzegowa regularność dla przekształceń pomiędzy obszarami w $\mathbb{R}^n$ jest trudnym zagadnieniem, które dla przekształceń pomiędzy rozmaitościami staje się zagadnieniem bardzo trudnym. Motywacje dla badań w rozdziale trzecim pochodzą z zagadnienia generowania przekształceń bi-harmonicznych z osobliwościami i uzyskania stąd wyników o niejednoznaczności. Ponadto, wyniki rozdziału mogą posłużyć do badania stabilności jednoznaczności ze względu na zaburzenia przekształceń brzegowych w odpowiedniej normie brzegowej.

Głównym wynikiem rozdziału 3 jest twierdzenie 3.0.3, które orzeka, że przy odpowiednich założeniach na wymiar dziedziny oraz regularność przekształcenia bi-harmonicznego zagadnienie Dirichleta ((3.0.1) na str. 42) dla danych brzegowych gładkich w pewnym wewnętrznym otoczeniu brzegu dziedziny posiada gładkie rozwiązanie na pełnym otoczeniu brzegu pod warunkiem, że zachodzi brzegowa formuła monotoniczności ((3.1.6) na str. 47). Wyniki rozdziału rozszerzają rezultaty z pracy Gong–Lamm–Wang dla stacjonarnych przekształceń bi-harmonicznych. Już po ukończeniu pracy doktorskiej Autorka dowiedziała się, że badane przekształcenia spełniają brzegową formułę monotoniczności (wynik pokazany w powstającym doktoracie [4], patrz uwagi na str. 13 i 45 rozprawy). A zatem teza twierdzenia 3.0.3 zachodzi przy bardziej ogólnych założeniach aniżeli podane w rozprawie. Strategia dowodzenia twierdzenia 3.0.3 w pracy jest oparta na nieistnieniu niestałych brzegowych przekształceń stycznych (podrozdział 3.3) oraz na uogólnieniu wyniku Scheven'a o zwartości rodziny przekształceń harmonicznych. Dowód wykorzystuje liczne obserwacje pomocnicze i subtelne oszacowania wymagające sprytu i cierpliwości (np.: obliczenia w dowodach lematu 3.3.3 i twierdzenia 3.2.1, oszacowania stałej w (3.2.4)). Pani Mazowiecka bardzo dobrze rozumie i kontroluje złożoną strukturę dowodu oraz posługuje się narzędziami np.: z zakresu zbieżności przekształceń w odpowiednich przestrzeniach funkcyjnych oraz własności przestrzeni Morrey'a. Czytelnik docenia również przejrzysty opis różnic między wynikami z pracy Scheven'a [47] a ich uogólnieniem w doktoracie. Ponadto, Autorka nie szczędzi opisów, aby przedstawić szkic i sedno rozumowań poszczególnych obserwacji przed dokładną prezentacją ich dowodu, dzięki czemu czytelnik może wyrobić sobie intuicję zanim pozna dokładny dowód. Ta troska o prezentacje wyników i jak najlepsze wprowadzenie do dowodów jest zresztą zauważalna w całej rozprawie i stanowi jej wielką zaletę.

Uwagi redakcyjne i językowe

Praca jest bardzo dobrze zredagowana. Widać, że tekst był wielokrotnie iterowany pod kątem językowym, np.: w całym tekście znalazłem tylko kilkanaście błędów typograficznych, pominiętych rodzajników, powtórzeń słów wynikających z edycji, itp. Ponadto, na str. 43 odnośnik do bibliografii [55] powinien być [22], B_θ^+ po prawej stronie oszacowania (3.1.4) powinno być B^+, pierwsze zdanie sformułowania lematu 3.1.8 wymaga przeredagowania, w drugim wierszu (3.2.2) brakuje oznaczenia zbioru B_4^+; w ostatnim zdaniu na str. 57 należy usunąć zwrot "sufficiently small" albo "small enough". Są to jednak drobne błędy i w dużym stopniu nieuniknione w długim tekście zawierającym liczne oszacowania i złożone formuły matematyczne. Błędy te nie mają większego wpływu na lekturę rozprawy.

Podsumowanie

Całość rozprawy oceniam bardzo dobrze. Zagadnienia rozprawy wyrastają z najnowszych badań w trudnej i cieszącej się dużym zainteresowaniem dziedzinie osobliwości przekształceń harmonicznych i bi-harmonicznych. Wyniki są interesujące, wymagają bardzo dobrego zrozumienia postawionych problemów badawczych oraz wysokich umiejętności matematycznych. W treść rozprawy wplecione są ciekawe i dobrze przemyślane zagadnienia otwarte, sugerując że Autorka zamierza kontynuować badania w kierunkach nakreślonych w dysertacji.

Uważam, że rozprawa Pani mgr Katarzyny Mazowieckiej spełnia wszystkie ustawowe, a także zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Dlatego z przekonaniem wnoszę o dopuszczenie Autorki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Tomasz Adamowicz

T. Adamowicz