Katowice, 26.02.2020 r.

prof. dr hab. Katarzyna Horbacz
Instytut Matematyki
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Recenzja rozprawy doktorskiej pani mgr Kamili Łyczek pt. „Różniczkowalność rozwiązań zaburzonego równania transportu"

1 Ogólna charakterystyka wyników

Rozprawa doktorska pani magister Kamili Łyczek poświęcona jest równaniu transportu w przestrzeni skończonych miar Radona $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Autorka rozważa zaburzenie współczynników równania liniowego i nieliniowego oraz bada różniczkowalność rozwiązań tych równań względem parametru zaburzającego. Różniczkowalności rozwiązań takich równań nie daje się uzyskać przy założeniach dotychczas występujących w literaturze, co autorka ilustruje kontrprzykładem 1 na stronie 9. Zaburzenie pola wektorowego w rozpatrywanym przez autorkę równaniu liniowym ma charakter liniowy, podobnie jak jego prawa strona. Dokładniej mówiąc, w rozprawie rozważany jest problem początkowy

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^h + \nabla_x\big(b^h(t,x)\mu_t^h\big) = w^h(t,x)\mu_t^h \quad \text{na } \Big(\mathcal{C}_c^1([0,+\infty)\times\mathbb{R}^d)\Big)^*, \\ \mu_{t=0}^h = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{1}$$

Symbolem μ_t^h oznaczamy rozwiązanie słabe rozwiązanie równania (1).

Autorka pokazała, że dla każdego ustalonego t, odwzorowanie

$$\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) \ni h \longmapsto \mu_t^h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

jest rożniczkowalne w przestrzeni predualnej do przestrzeni funkcji ograniczonych, których pierwsze pochodne są ograniczone i holderowsko ciągłe z wykładnikiem $\alpha \in (0,1)$ (przestrzeń $\mathcal{Z}$). Dowód tego twierdzenia sprowadza się do wykazania, że granica odpowiednich ilorazów różnicowych jest elementem przestrzeni $\mathcal{Z}$.

Przytoczone tutaj twierdzenie jest jednym z głównych wyników rozprawy. Podobny wynik udowodniony w przypadku gdy zaburzenie występuje tylko w polu wektorowym, został opublikowany w pracy doktorantki z P. Gwiazdą, S. C. Hille i A. Świerczewską-Gwiazda *Differentiability in perturbation parameter of measure solutions to perturbed transport equation,* Kinetic and Related Models, 12:1093–1108, 2019.

W kolejnej części pracy pani mgr Kamila Łyczek udowodniła, że pochodne punktowe słabego rozwiązania równania (1) nie tylko istnieją, ale również zależą w sposób ciągły od parametru h. Twierdzenie to stanowi część nieopublikowanej jeszcze pracy autorki oraz P. Gwiazdy i S. C. Hille *Differentiability in perturbation parameter of measure solution to non-linear perturbed transport equation.*

Trzeci główny rezultat rozprawy doktorskiej dotyczy różniczkowalności nieliniowego równania transportu względem parametru zaburzającego współczynniki tego równania. Wynik ten został zamieszczony we wspomnianej wcześniej pracy z P. Gwiazdą i S. C. Hille. Jego dowód polega na przybliżaniu rozwiązań zagadnień nieliniowych rozwiązaniami zagadnień liniowych.

Autorka rozważa następujące zagadnienie

$$(2) \qquad \begin{cases} \partial_t \mu_t^h + \nabla_x \cdot \left(v^h(k^v_{\mu_t^h})(x)\mu_t^h \right) = m^h(k^m_{\mu_t^h})(x)\mu_t^h & \text{na } \left(\mathcal{C}_c^1([0,+\infty)\times\mathbb{R}^d)\right)^* \\ \mu_{t=0}^h = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

gdzie

$$v^h(k^v_{\mu_t^h})(x) = v_0\left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{v_0}(y,x)d\mu_t(y)\right) + hv_1\left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{v_1}(y,x)d\mu_t(y)\right),$$

$$m^h(k^v_{\mu_t^h})(x) = m_0\left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{m_0}(y,x)d\mu_t(y)\right) + hm_1\left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{m_1}(y,x)d\mu_t(y)\right).$$

Głównym rezultatem tej części pracy jest pokazanie nie tylko różniczkowalności słabych rozwiązania równania (2) względem zaburzenia, ale także zależności pochodnych $\partial_h \mu_t^h$ względem czasu.

2 Język i sposób prezentacji wyników

Wedle mojej opinii, rozprawa pani Łyczek jest bardzo interesująca i stanowi wyczerpujące opracowanie badanego zagadnienia. Trudno również nie zwrócić uwagi na jej znaczną objętość w porównaniu za znakomitą większością innych rozpraw doktorskich. Niemniej jednak, należy tu zaznaczyć, iż część rozprawy pani Łyczek (tj. rozdziały 2 i 3) stanowią wyniki znane, mieszczące się w zakresie klasycznych zagadnień poruszanych w ramach kursowych wykładów z równań różniczkowych zwyczajnych oraz analizy funkcjonalnej. Co więcej, niejednokrotnie wyniki te podane są wraz z dowodami.

W części poświęconej nowym wynikom uzyskanym przez autorkę szczególnie podobał mi się dowód twierdzenia 3, w którym pani Łyczek pokazała nie tylko różniczkowalność słabych rozwiązania równania (2) względem zaburzenia, ale także zależność pochodnych $\partial_h \mu_t^h$ względem czasu.

Pani mgr Kamila Łyczek trafnie dokonała wyboru literatury oraz odpowiednio dobrała metody i narzędzia badawcze. Warto podkreślić również fakt, że rozprawa zawiera liczne intuicje związane z przedstawianą teorią oraz interpretacje przedstawianych wyników, co jest niewątpliwie rzadkie i trudne, a świadczy o dogłębnym zrozumieniu przez autorkę prezentowanej teorii. Co więcej, umieszczone przez Nią rysunki czynią pracę bardziej czytelną i zrozumiałą. Ponadto, w pracy znaleźć można również krótki rys historyczny przedstawianej teorii oraz wielu związanych z nią pojęć. Tak obszerne przedstawienie tematu jest z jednej strony bardzo cenne, z drugiej, dopiero po przeczytaniu połowy pracy pojawiają się nowe, ciekawe wyniki. W pracy dostrzec można również wiele pojęć i ich własności, które nie są wykorzystywane w jej zasadniczej części. Zapewne intencją autorki było ułatwienie w ten sposób czytelnikowi zrozumienia prezentowanych treści oraz specyfiki stosowanego aparatu matematycznego, co nie pozwala jednak wyzbyć się wrażenia, iż nadmiar ten momentami zbytecznie wydłuża pracę, nadając jej przy tym nieco nazbyt ogólnikowy charakter. O ile przystępny język rozprawy oraz wspomniane już wyżej intuicje związanymi przedstawianymi zagadnieniami niewątpliwie zasługują na uznanie, o tyle pojawiające się niejednokroć nieprecyzyjne lub kolokwialne sformułowania, jak np. „klasycznych funkcji" (str. 32), czy „wygodniejszego funkcjonału" (str. 38), mogą być nieco frustrujące dla czytelnika.

Autorce przytrafiło się kilka drobnych błędów, których listę przedstawiam poniżej.

- Str. 41: błędne zdefiniowanie metryki ρ_S.
- Str. 44: brak definicji $\mathcal{X}$
- Str. 46: wprowadzenie oznaczenia δ_0 na deltę Diraca pojawia się w pracy wielokrotnie
- Str. 49: błędnie podany numer strony 2.52
- Str. 50: raz autorka używa $\frac{d}{dt}$ a raz ∂_t w tej samej definicji 3.6

Nie mam wątpliwości, że autorka rozwiązała w oryginalny sposób ciekawy i niebanalny problem naukowy, wykazując się przy tym wiedzą specjalistyczną, uprawniającą ją do ubiegania się o stopień doktora nauk matema-

tycznych. Jej rozprawa została napisana z dużym znawstwem przedmiotu i głęboko przemyślana.

3 Konkluzja:

Biorąc pod uwagę szczegółową analizę dotychczasowego dorobku matematycznego w tej dziedzinie, a także doceniając samodzielne dokonania pani magister Kamili Łyczek, uważam, że Jej rozprawa doktorska pt. „Różniczkowalność rozwiązań zaburzonego równania transportu" odpowiada wymogom ustawowym i zwyczajowym stawianym pracom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie Jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Horbacz

Katarzyna Horbacz