prof. dr hab. Adam Bobrowski 22 kwietnia 2020

Opinia o rozprawie doktorskiej pani magister Kamili Łyczek

1 Charakterystyka wyników

Rozprawa pani mgr inż. Kamili Łyczek, doktorantki pani dr hab. Agnieszki Świerczewskiej–Gwiazdy, powstała w środowisku dobrze obeznanym z analizą dynamiki rozwiązań równań różniczkowych w przestrzeniach miar i nosi tytuł „Różniczkowalność rozwiązań zaburzonego równania transportu". Takie niezbyt precyzyjne określenie nie do końca oddaje jej zawartość, sugerując, zapewne niezamierzenie, że zagadnieniem (umówmy się: niezbyt frapującym) jest różniczkowalność względem czasu. Na szczęście już sprawnie napisany wstęp kwestię tę wyjaśnia: chodzi o różniczkowalność względem parametru zaburzającego równanie, a dokładniej: parametru zaburzającego występujące w nim współczynniki funkcyjne. Temat to i ciekawszy, i donioślejszy dla zastosowań.

Autorka zaczyna w.w. wstęp od przedstawienia równania ewolucji populacji ze strukturą wiekową, przypisując je A.G. McKendrickowi[1] i argumentuje, że naturalną przestrzenią, w której powinno się je analizować jest przestrzeń miar. Następnie stwierdza, że tematem jej rozprawy nie jest jednak wymieniony wyżej model strukturalny, a jedynie równanie transportu, do którego model ten się redukuje, gdy usuniemy z niego warunek brzegowy. Choć jestem zdania, że warunek ten jest najciekawszą, najbardziej intrygującą częścią równania Sharpe'a–Lotki–McKendricka, uważam też, że skoncentrowanie się na samym równaniu transportu to zabieg słuszny; materia jest zbyt skomplikowana jak na doktorat, by od razu atakować model pełny.

Wychodząc ze znanego powszechnie stwierdzenia, że rozwiązania równania transportu w normie wahania całkowitego nie są nawet ciągłe, p. mgr Łyczek

[1]Zapominając przy tym, że jak dowodzi Ryszard Rudnicki w swojej znakomitej książce „Modele i metody biologii matematycznej. Część I: modele deterministyczne" (IMPAN, Warszawa 2014), 15 lat przed McKendrickiem rozważali je F.R. Sharpe i A.J. Lotka.

uzasadnia następnie użycie metryk typu Wassersteina i przedstawia przykład pokazujący, że choć, jak już wcześniej udowodniono, w metrykach tego typu odwzorowanie przyporządkowujące parametrom rozwiązania jest lipschitzowsko ciągłe, nie można liczyć na to, iż będzie ono różniczkowalne. Jest to odbicie znanego z analizy funkcjonalnej faktu, że odwzorowanie lipschitzowskie o wartościach w przestrzeni Banacha, nie musi, w odróżnieniu od tych o wartościach w przestrzeniach skończenie wymiarowych, być różniczkowalne (nawet prawie wszędzie). Archetypowym przykładem jest to zadane wzorem

$$(0, \infty) \ni t \mapsto 1_{(0,t)} \in L^1(0, \infty),$$

w którym $1_{[0,t)}$ jest indykatorem (funkcją charakterystyczną) przedziału $(0, t)$, a $L^1(0, \infty)$ przestrzenią funkcji całkowalnych na prawej półosi: wszystkie inne odwzorowania lipschitzowskie można otrzymać jako złożenia tego jednego z odpowiednimi homomorfizmami. O ile opisany tu problem różniczkowalności jest inherentny dla przestrzeni Banacha[2], bo w nich norma jest z przestrzenią związana nierozerwalnie, w przestrzeni miar widzianej jako przestrzeń metryczna można go rozwiązać poprzez kolejne osłabienie metryki.

Takie, bardzo konkretne, osłabienie proponuje Autorka i przedstawia po krótce dwa główne twierdzenia rozprawy mówiące o tym, że rzeczywiście w zmodyfikowanej przez nią metryce zaburzenia parametrów równania transportu są różniczkowalne, zarówno w przypadku liniowym jak i (szczególnym, rozważanym w pracy) nieliniowym.

Rozdział drugi, zatytułowany „Wprowadzenie", zawiera materiał podstawowy dla pracy: twierdzenia o istnieniu i jedyności rozwiązań różniczkowych zwyczajnych, informacje o potokach pól wektorowych, słabych rozwiązaniach równania transportu, metodzie charakterystyk, metrykach w przestrzeniach miar i o samych miarach, oraz wprowadzenie do rozwiązań słabych i dystrybucyjnych.

Nie umniejszając w żadnej mierze roli rozdziału drugiego, ilustrującego między innymi to, że zagadnienie, którym zajęła się doktorantka wymaga pewnego matematycznego obycia, w przybliżeniu można stwierdzić, że właściwa rozprawa zaczyna się od rozdziału trzeciego, poświęconego rozwiązaniom liniowego równania transportu. Zawiera on w szczególności dyskusję rozwiązania tego równania, wyrażonego w terminach potoku związanego z występującym w równaniu polem wektorowym. Wspomniany tu niemal jawny wzór pozwala potem otrzymać kluczowe oszacowania.

Głównym wynikiem rozdziału czwartego, a zarazem pierwszym głównym wynikiem rozprawy, są dwa twierdzenia (twierdzenie 1 i twierdzenie 2 na stronie 70), mówiące przy jakich warunkach odwzorowanie przyporządkowujące rozwiązania równania transportu zaburzeniu obu jego funkcyjnych parametrów jest różniczkowalne, kiedy jego pochodna jest ciągła i do jakiej przestrzeni należy.

Dowód polega na benedyktyńskim szacowaniu szeregu skomplikowanych wyrażeń całkowych. Jestem pełen podziwu dla tego rozumowania, głównie dlatego, że sam nie byłbym w stanie go przeprowadzić. Powodem tej niemożności zaś wcale nie jest tylko to, że jestem leniwy, ale przede wszystkim to, że prócz

[2] Jedynym wyjątkiem są tak zwane przestrzenie z własnością Radona-Nikodyma.

niezbędnych intuicji, brak mi tak potrzebnej w tego typu przypadkach wytrwałości i dokładności. Tylko ten, kto nigdy takich rachunków nie wykonał może stwierdzić, że są łatwe lub standardowe. Może są i łatwe, ale dopiero wtedy, gdy się je sprawdza po kimś, kto już je przeprowadził.

Wreszcie następuje rozdział piąty, serce całej rozprawy. Jego istotnym punktem wyjścia jest wskazanie naturalnego kandydata na rozwiązanie (pewnego szczególnego, dobrze osadzonego w literaturze wariantu) równania nieliniowego, i dowód, że jest to po pierwsze rozwiązanie prawdziwe i po drugie – w pewnej klasie jedyne. Dopiero później oczywiście można przejść do zagadnienia różniczkowalności interesującego Autorkę odwzorowania. Skalę trudności dowodu głównego wyniku (twierdzenia 3 ze strony 83) ilustruje fakt, że oczywiście nie ma jawnych wzorów na rozwiązania rozważanego równania nieliniowego. Są one raczej otrzymywane jako granice pewnych schematów aproksymacyjnych, w których rozwiązania równania liniowego otrzymane w jednym kroku służą jako funkcyjne, czy raczej miarowe, parametry równania rozwiązywanego w kroku kolejnym. Dopiero z tak niejawnie otrzymanych rozwiązań, zaburzonego i niezaburzonego, tworzy się ilorazy różnicowe i sprawdza, że dla tych ostatnich spełniony jest warunek Cauchy'ego.

Również w tym dowodzie niezbędna jest benedyktyńska cierpliwość, ale i dużo wiary i doświadczenia. Bardzo dobre wrażenie robi ponadto styl, w którym Autorka porusza się w labiryncie subtelnych pojęć analitycznych i zręcznie pokonuje pojawiające się przed nią przeszkody techniczne przy pomocy narzędzi omówionych wcześniej.

Kończący (nie licząc dodatków) rozprawę rozdział szósty zawiera opis dwóch zgrabnych zastosowań oraz krótką, chyba potraktowaną nieco po macoszemu, listę potencjalnych kierunków dalszych badań.

2 Ogólne wrażenie po lekturze

Rozprawa, przynajmniej na tle innych prac doktorskich, które miałem okazję recenzować ostatnio, wyróżnia się pozytywnie ponadprzeciętną dbałością zarówno o klarowne wyrażanie myśli i poprawną polszczyznę – choć momentami bliższą potocznej, mówionej[3], niż ścisłej, naukowej[4] – jak i szatę graficzną.

Tu i ówdzie napotkałem zaburzające płynną lekturę powtórzenia tego samego terminu w jednym lub w kilku kolejnych zdaniach; powtórzenia takie w języku polskim – w przeciwieństwie do angielskiego, z którego zapewne niektóre

[3]Zapewne jest to pokłosie chlubnej działalności kandydatki do stopnia doktora na polu popularyzacji matematyki.

[4]Przykładem może tu służyć strona 8. Czytelnik znajdującego się na niej zdania „Przestrzeń $\mathcal{Z}$ jest przestrzenią predualną do $C^{1+\alpha}(\mathbb{R})$, to znaczy przestrzeń ...” zamiast słowa „przestrzeń” w mianowniku oczekuje raczej dopełniacza, bo następujący po przecinku zwrocik „to znaczy” zwykło się odnosić do tego, co stoi tuż przed nim i stosuje się wtedy, gdy to coś przed nim stojące chce się wyjaśnić. Tu Autorka nie chce jednak wyjaśniać oznaczenia $C^{1+\alpha}(\mathbb{R})$ lecz rozwinąć całą pierwszą część zdania. Nieco bardziej poprawnie tekst ten brzmiałby „„Przestrzeń $\mathcal{Z}$ jest przestrzenią predualną do $C^{1+\alpha}(\mathbb{R})$. To znaczy, że przestrzeń ... ”. Taki potoczny styl panuje w całej rozprawie, powodując czasem zabawne nieporozumienia.

fragmenty były tłumaczone – o ile nie ukryje się ich sprytnie rozmieszczonymi akcentami – są ciągle uważane za oznakę słabego stylu, czy wręcz braku obeznania z językową materią, o które wszelako Autorki nie posądzam. Gdzie indziej wewnętrznie usztywniła mnie, krochmalnie w naszym języku brzmiąca, strona bierna, rzekomo – ale tylko rzekomo, proszę mi wierzyć – charakteryzująca język naukowy. W zbyt wielu miejscach niestety pojawiła się też skontaminowana konstrukcja „Jeżeli (jeśli) ..., wtedy ...” zastępująca coraz częściej w tekstach matematycznych, zapewne jako nieudolne tłumaczenie „If ..., then ... ”, poprawną „Jeśli ..., to ...”. Całość, najwyraźniej dobrze przemyślaną i zredagowaną czyta się jednak dobrze; Pani Magister wie co jest istotne, a co mniej, i tą wiedzą się rozsądnie, sukcesywnie dzieli, okraszając gdzieniegdzie swe opowiadanie informacjami historycznymi.

Przez chwilę bałem się wręcz, czy charakteryzująca kandydatkę dbałość o szczegóły nie przeobrazi się w chorobliwy perfekcjonizm, sprawiając, że z rozprawy znikną wszelkie ślady działalności elektronicznej mutacji staropolskiego chochlika drukarskiego, z którym się dobrze znamy i lubimy. Na szczęście po dłuższych poszukiwaniach znalazłem jeden odcisk jego stopy, za to w rzucającym się w oczy tytule, na stronie 58. Jak się później okazało, czy to przez umiłowanie tradycji, czy przez grzeczność dla tego starszawego już, a ciągle psotnego jegomościa, czy po to by sprawdzić czujność niżej podpisanego, Autorka pozostawiła w istocie więcej jego psikusów.

Licho niecnotliwe wkręciło się na przykład już w ósmą linijkę tekstu i zamieniło „równań różniczkowych cząstkowych” na „równań różniczkowym cząstkowych”. Potem, na stronie ósmej podpowiedziało doktorantce, że po to, by wykazać, iż norma wahania całkowitego różnicy między miarami Diraca w dwóch różnych punktach równa jest 2, wystarczy rozważyć funkcję stale równą 1, podczas gdy w istocie rozważyć trzeba taką, która w jednym z tych punktów przyjmuje wartość 1, a w drugim -1. (A zrobiło to tak sugestywnie, że zainteresowana zapomniała, iż funkcja stale równa jeden nawet nie jest elementem przestrzeni $C_0(\mathbb{R}^d)$). Cichaczem zamieniło też „mniejsza lub równa 1” na „mniejsza niż 1”.

Na stronie dziesiątej natomiast tak majstrowało i majstrowało, że doktorantce wyszło zdanie mówiące, iż wystarczającą regularnością funkcji są najpierw funkcje (sic!) a zaraz potem cała ich przestrzeń; nie oparło się też pokusie, by słowo *wykładnik* zamienić na *wykłądnik*. Użyło ponadto kindżału, unużanego w miksturze z krwi kapłona, jaj przepiórczych i glistnika-jaskółczego ziela, zwiększającej jego moc czarodziejską, by na stronie jedenastej wyciąć informację o tym czym są funkcje m i v (używane zresztą w dwóch znaczeniach).

To bynajmniej nie jest koniec działalności chochlika: na przykład na stronach 20-21 przechera zamieniła $|\cdot|$ na $\|\cdot\|$ albo odwrotnie i złośliwie nie zostawiła wiadomości co jest, *nomen omen*, normą. Nieźle ubawiło się też na stronie 24., gdy usunęło przecinek miedzy słowami *zadanymi* i *borelowsko* sprawiając, iż czytelnik zastanawiał się, co to znaczy, że mierzalna funkcja jest zadana borelowsko.

Pełnej listy, nawet gdybym potrafił ją stworzyć, nie będę tu podawał, by innym, ewentualnym czytelnikom nie psuć zabawy (zob. też rozdział czwarty niniejszej recenzji, za podpisem). Jestem natomiast dozgonnie p. mgr Łyczek wdzięczny za poszanowanie dobrych obyczajów, bo tak zupełnie bez chochlika byłoby po prostu nudno. A co gorsza, wszystkie twierdzenia byłyby z założenia prawdziwe.

* * *

Jeśli mi czegoś w rozprawie rzeczywiście brakuje, to – jako poniekąd analitykowi – wskazania palcem: „o tu, w tym miejscu leży główny powód, dla którego zaburzanie rozwiązań równania transportu jest operacją różniczkowalną", powód ten gubi się bowiem w mnogości rachunków.

W analogicznych przypadkach dość często kluczem jest następujące twierdzenie, które pozornie jest uogólnieniem Banacha o punkcie stałym, a w istocie tylko jego zręcznym przeformułowaniem: jeśli o ciągu $A_n, n \geq 1$ odwzorowań zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d) w siebie możemy stwierdzić, że istnieje taka stała $c \in [0, 1)$, iż

$$d(A_n(x), A_n(y)) \leq c\, d(x, y), \qquad x, y \in X, n \geq 1, \tag{1}$$

a granica $A(x) := \lim_{n\to\infty} A_n(x)$ istnieje dla każdego $x \in X$, to po pierwsze każde z tych odwzorowań ma dokładnie jeden punkt stały i, po drugie, ciąg tych punktów stałych dąży do punktu stałego odwzorowania A, który też oczywiście jest tylko jeden.

Wskazanie ciągu $A_n, n \geq 1$ istotnego dla rozprawy, oraz odpowiadającej mu stałej c spełniającej warunek (1) sprawiłoby niewątpliwie, że rozumowanie stałoby się jaśniejsze i bardziej „chrupkie". Ale to oczywiście też kwestia gustu.

* * *

Jest jeszcze jeden powód, dla którego rozprawa ta różni się od innych. Autorka dyskretnie, ale stanowczo stara się mianowicie, by wszystko było dla niej i dla czytelnika jasne. Nie chowa się za autorytetem wielkich twierdzeń i pojęć, które każdy czytelnik musi rzekomo znać, tylko tłumaczy krok po kroku wszystko, co jej zdaniem wyjaśnienia wymaga. Nie epatuje rzucanymi od niechcenia sformułowaniami na tyle ogólnymi i okrągłymi, że nie mówiącymi w istocie nic. Nie próbuje nas też przekonywać, że wszystko to, o czym pisze jest tak samo w sobie genialne, że wyjaśnień już nie wymaga[5]. Sprawia przez to, że odnosimy wrażenie, iż to wszystko rzeczywiście jest proste i logiczne, choć nie banalne.

Takie podejście do tekstu to coś więcej niż zapał popularyzatorski. Lekkość, z którą Autorka tłumaczy wszystko to, co może być zawiłe, oraz bijące z tekstu przekonanie, że właśnie to, a nie co innego trzeba uczynić zrozumiałym świadczy o jednym: ona naprawdę każdy z wykonanych kroków przemyślała. Nie boi się na przykład wyjaśnić po co wprowadza dane pojęcie, bo wie po pierwsze, że powód jest logiczny, choć może na początku się nie narzuca, i – po drugie – jakie jest miejsce tego fragmentu rozumowania w całej analitycznej układance.

[5] Być może podświadomie porównuję tę rozprawę z inną, którą miałem nieszczęście recenzować niedawno, a która pełna była nonszalancji, dowodzącej raczej pobieżnego niż dogłębnego wglądu w tematykę.

Być może po trosze odtwarza sposób, w który ten materiał sama poznawała, a jeśli tak, to widać, że robiła to gruntownie, dowodząc, iż jest umysłowością niepośledniego gatunku, wykraczającego poza przeciętną doktoratu.

Choć rozprawa zawiera całą masę skomplikowanych rachunków, bynajmniej się do nich nie sprowadza, o nie. Jej Autorka wykonała znacznie trudniejszą, znacznie bardziej godną pochwały pracę.

3 Podsumowanie

W rozprawie brak intelektualnych fajerwerków, twierdzeń zaskakujących swym wewnętrznym pięknem i głębią czy elegancją rozumowania[6]. Brak też spotykanej czasami w doktoratach ekwilibrystyki słownej i pojęciowej; szukania niuansów i odcieni znaczeń. Ale też i nie ma ona, i w zamyśle mieć nie mogła, charakteru ludycznego. To kawał rzetelnej matematyki, popartej dobrym warsztatem pojęć i technik, skrojony akurat na doktorat na porządnej uczelni u porządnego promotora, a byle kto – bez wspomnianej wyżej maszynerii, lub obeznany z nią słabo – po prostu by sobie z oporną, toporną materią nie poradził.

Jeśli to jest więc ornament, to wykuty w metalu, a nie koronka wydziergana szydełkiem. Jeśli książka, to raczej użytkowa proza niż zbiorek poezji, ale napisana po ludzku i dla ludzi.

Nie jest swoją drogą tajemnicą, że lekkość pióra nie wystarcza do pisania naprawdę dobrych wierszy: nikt jeszcze niczego nie osiągnął bez pracy nad warsztatem, że już o tym, iż trzeba pisać o sprawach ważnych, i to sensownie, szerzej nie wspomnę. Podobnie jest moim zdaniem z nowoczesną matematyką: konieczne jest najpierw solidne ugruntowanie w technikach i terminologii, zanim ewentualnie uda się napisać matematyczny poemat, czy wręcz pojedynczy sonet. Doktorantka wykazała, że z powodzeniem wykonała ten pierwszy, podstawowy krok: pod kierunkiem swojej promotorki, używając zaawansowanej maszynerii rozwiązała praktyczne, niełatwe zadanie.

Być może swój głęboki szacunek dla takiej działalności naukowej wyraziłem jeszcze nie nazbyt jasno. Napiszę więc ponownie: nie mam najmniejszych wątpliwości, że praca p. mgr Kamili Łyczek to materiał na doktorat i to bardzo solidny, być może nawet zasługujący na wyróżnienie.

A. Bobrowski

Adam Bobrowski

[6] Choć być może za szybko przeszliśmy do porządku dziennego na przykład nad tym, że Autorka wynalazła metrykę stosowną do różniczkowania zaburzeń równania transportu; a przecież wymagało to pewnego kunsztu i niebagatelnych, niebanalnych intuicji. Co więcej fakt, że w jednej metryce, o której na pozór nic złego rzec nie można, coś nie jest różniczkowalne, a w drugiej, równie niewinnej, a i owszem, powinno zadziwiać filozofów (tych nielicznych oczywiście, którzy cokolwiek z matematyki rozumieją).

4 Dodatek: lista wybranych, mniej lub bardziej drobnych uwag[7]

9_7 — Pisanie o $\frac{\mu_t^h - \mu_t^0}{h}$ jako o *ciągu* jest lekkim nadużyciem i nie ma co udawać, że chodzi o ciągi uogólnione.

9_3 — Jeżeli wybierzemy $\longrightarrow$ Jeżeli wybierzemy odpowiednio małe.

12^{11} — Zamiast *zachodzi* ładniej byłoby napisać *zachodzą następujące warunki.*

15_2 — strona 32-33 $\longrightarrow$ strony 32–33.

18^6 — Lepiej byłoby tu napisać tak: $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \supset U \to \mathbb{R}^d$.

18^{10} — U jest podzbiorem $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Co to zatem znaczy, że przedział czasu jest zawarty w U?

18^{22-23} — *Rozwiązanie lokalne, czyli ...* Jaka jest rola tego bezokolicznika zdania?

21^3 — Norma w $\mathbb{R}^d$ raz jest oznaczona $|\cdot|$, a raz, na przykład tu, $\|\cdot\|$ (dwukrotnie). Dobrze byłoby, by oznaczenia były jednolite.

21^{16} — *Odwzorowanie, które spełnia zagadnienie* to konstrukcja dość ryzykowna, choć skłamałbym, gdybym twierdził, że niezrozumiała.

40 — *Operator* to termin zarezerwowany dla przekształceń, których argumentami i wartościami są funkcje. O odwzorowaniach takich jak $W_p^{a,b}$, które funkcjom przyporządkowują liczby, zwykło się raczej mówić, że są *funkcjonałami.*

51 — Wydaje mi się, że najczęściej używanym polskim odpowiednikiem *push-forward of a measure* jest *transport miary*, ale być może dotyczy to głównie literatury probabilistycznej.

65 — *Przestrzeń zwagowana* to określenie na pewno niezręczne, o ile w ogóle poprawne. Tak, wiem, to tłumaczenie angielskiego *weighted space*, ale co można zrobić w angielskim nie zawsze można w polskim, i odwrotnie. O ile dobrze się orientuję, w naszym języku nie ma czasownika *wagować*, a jedynie *ważyć*, więc nic nie może zostać *zwagowane.* Można też wyposażać w wagę, co byłoby bliskie znaczeniu tu potrzebnemu, ale też nie do końca. *Przestrzeń z wagą*? Hm, też raczej nie, bo nie chodzi o to, że przestrzeni coś dodajemy (tę niby wagę mianowicie) a raczej o to, że inaczej ważone (patrz niżej) są jej elementy.

Nie mam gotowego rozwiązania, ale biorąc pod uwagę istniejące pojęcie *średnia ważona* można śmiało mówić o *ważonej normie.* Proponowałbym więc nieśmiało termin *przestrzeń z ważoną normą.*

[7] A niektórych zupełnie niedrobnych, ale być może tylko dla wyżej podpisanego.

66 — Może ładniej byłoby, gdyby Autorka opisując normę Bieleckiego, zamiast powoływać się na artykuł prof. Kwapisza cytowała oryginalną pracę jej pomysłodawcy, z ewentualnym zaznaczeniem, że prof. Kwapisz używał jej jako pierwszy w kontekście takim a takim.

130 — Szczerze nienawidzę panoszącej się ostatnio w polskich doktoratach, jako kalka angielskiej *If … then …*, konstrukcji *Jeżeli …, wtedy …*, zastępującej prawidłową *Jeżeli …, to …*. Znajomi poloniści mój krytycyzm tonują twierdząc, że może ona też być skróconą formą poprawnego, choć trochę bardziej emocjonalnego, zwrotu *Jeżeli …, to wtedy …*, ale nie przekonują mnie w pełni, bo w matematyce rzadko kto wplata emocje w wypowiedź twierdzenia, a właśnie w tekstach matematycznych *Jeżeli …, wtedy …* spotykam najczęściej. Krakowskim targiem, mam ogólne zalecenie by pojedynczych wystąpień skazy nie piętnować, a reagować tylko, gdy widzę ją zbyt często. Znalazłszy tę konstrukcję kilka razy na stronie 50-tej, cztery razy na stronie 130-tej i aż nazbyt często gdzie indziej wołam zatem głosem wielkim, a zbolałym.

141 — W obszernej bibliografii uderza fakt, że uporządkowano ją w kolejności alfabetycznej używanych w niej skrótów, a nie nazwisk autorów, co utrudnia z niej korzystanie.