prof. dr hab. Grzegorz Zwara
Wydział Matematyki i Informatyki
UMK w Toruniu

10 sierpnia 2017 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej Joachima Jelisiejewa „Hilbert schemes of points and their applications"

Klasycznymi obiektami badanymi w Geometrii Algebraicznej są wprowadzone przez Grothendiecka prawie 60 lat temu schematy Hilberta. W dużym uproszczeniu, schematy Hilberta opisują podschematy zawarte w danej rozmaitości algebraicznej X. W rozprawie doktorskiej zakładamy, że X jest spójną, gładką rozmaitością quasi-rzutową, oraz ograniczamy się do schematów Hilberta punktów

$$Hilb_{pts}(X) = \coprod_{r \geqslant 1} Hilb_r(X),$$

czyli rozważamy rodziny podschematów $\mathrm{Spec}(R)$ skończonej długości $r \geqslant 1$, w rozmaitości X (tzn. R jest łączną i przemienną algebrą nad ciałem bazowym k, której wymiar jako przestrzeni liniowej wynosi r). Wiadomo wówczas, że schemat $Hilb_r(X)$ jest spójny i posiada wyróżnioną składową nieprzywiedlną $Hilb_r^{sm}(X)$, zawierającą punkty odpowiadające podschematom gładkim w X długości r. Schematy odpowiadające punktom składowej $Hilb_r^{sm}(X)$ nazywamy *wygładzalnymi w* X.

Jeden z głównych wyników rozprawy (Theorem 1.4, 5.1) pokazuje, że pojęcie wygładzalności danego skończonego k-schematu $\mathrm{Spec}(R)$ nie zależny od wyboru (gładkiej) rozmaitości X. Ponadto, schemat $\mathrm{Spec}(R)$ jest wygładzalny wtedy i tylko wtedy, gdy każda jego spójna składowa jest wygładzalna (przypomnijmy, że R jako algebra skończona jest produktem algebr lokalnych).

* * *

Autor rozprawy zajmuje się problemem, czy skończone schematy Gorensteina są wygładzalne. Jeden z głównych rezultatów rozprawy (Theorem 1.5, 6.1) odpowiada pozytywnie w przypadku, gdy ciało bazowe k nie jest charakterystyki 2 lub 3 oraz schemat Gorensteina $\mathrm{Spec}(R)$ jest długości $r \leqslant 13$. Dodatkowo, jeśli $r = 14$ oraz schemat nie jest wygładzalny, to R jest algebrą lokalną z funkcja Hilberta $(1, 6, 6, 1)$. Następnie autor pokazuje (Theorem 1.6, 6.3) w przypadku charakterystyki zerowej, że nieprzywiedlna składowa H_{1661} schematu Hilberta $Hilb_{14}(\mathbb{A}^6)$, wyznaczona przez niewygładzalne podschematy Gorensteina, jest wiązką wektorową nad otwartym podzbiorem przestrzeni hiperpowierzchni stopnia 3 w $\mathbb{P}^5$. Co więcej, przekrój składowych $H_{1661} \cap Hilb_r^{sm}(\mathbb{A}^6)$ jest ściśle związany z obiektem rozważanym dla powyższych hiperpowierzchni, tzw. dywizorem Ilieva-Ranesteda. Można więc podsumować, że otrzymany przypadek niwygładzalnych skończonych schematów Gorensteina został dogłębnie zbadany.

Warto nadmienić, że konsekwencją wygładzalności schematów Gorensteina jest otrzymanie równań wielomianowych opisujących pewne r-te rozmaitości siecznych (Theorem 1.8) dla $r \leqslant 13$. Uzyskany rezultat jest uogólnieniem wcześniejszego wyniku promotorów rozprawy (dla $r \leqslant 10$ i przy bardziej restrykcyjnych założeniach dotyczących charakterystyki ciała bazowego).

* * *

W Geometrii Algebraicznej rozważa się również punktowe schematy Hilberta $Hilb\,P_r(X, p)$, gdzie zakłada się, że jedynym punktem domkniętym skończonego podschematu $\mathrm{Spec}(R)$ jest $p \in X$ (w szczególności algebra R jest lokalna). Autor w rozprawie pokazuje (Theorem 1.7, 7.2), że podzbiór $Hilb\,P_r(\mathbb{A}^n, p)$ podschematów Gorensteina posiada wymiar $(r-1)(n-1)$ o ile $r \leqslant 9$ oraz ciało bazowe k jest charakterystyki zero.

Wynik ten posłużył do pokazania istnienia r-regularnych odwzorowań (Theorem 1.9)

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+1)(r-1)}, \qquad \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{(n+1)(r-1)}$$

rozważanych w topologii algebraicznej. Funkcję ciągłą $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ nazywamy r-regularną, o ile obrazy dowolnych r punktów są liniowo niezależne.

* * *

Obszerna rozprawa doktorska (130 stron) jest bardzo dobrze napisana. Pierwszy rozdział z jednej strony służy przedstawieniu głównych wyników rozprawy, a z drugiej strony przedstawia stan wiedzy na temat schematów Hilberta. Zamieszczony krótki historyczny przegląd pokazuje, że autor zajmuje się problemami interesującymi szersze grono matematyków. Ciekawym dodatkiem jest lista otwartych problemów dotyczących schematów Hilberta punktów i ich składowych. Po pierwszym rozdziale wprowadzającym praca została w sposób klarowny podzielona na trzy części.

Pierwsza część (rozdziały 2,3) napisana w języku Algebry Przemiennej dotyczy algebr skończonych, ze szczególnym skupieniem na algebrach Gorensteina. Omawiane są tutaj mozliwe funkcje Hilberta dla algebr skończonych (Gorensteina). Przedstawiona jest jedna z najważniejszych metod badawczych wykorzystanych przez doktoranta, a mianowicie systemy odwrotne Macaulaya, pozwalające przejść ze świata algebr do świata szeregów formalnych. Otrzymane są nawet przykłady klasyfikacji algebr (z dokładnością do izomorfizmu) o zadanej funkcji Hilberta.

W drugiej częsci rozprawy (rozdziały 4,5) używającej język schematów, autor w (relatywnie) przystepny sposób konstruuje schematy Hilberta, dowodząc wiele lematów, a w przypadku bardzo technicznych dowodów, sygnalizując główne idee. Oprócz konstrukcji schematów Hilberta, uogólniania systemów odwrotnych Macaulaya, przedstawione są przede wszystkim dowody wspomnianych wcześniej głównych wyników rozprawy dotyczących wygładzalności skończonych schematów.

Ostatnia część (rozdziały 6,7) poświecona jest głównie dowodom wyników dotyczących wygładzalności schematów Gorenstaina małej długości, składowej H_{1661} oraz wymiarowi podzbioru podschematów Gorensteina w $Hilb\, P_r(\mathbb{A}^n, p)$.

* * *

Rozprawa jest napisana w sposób dojrzały i pokazuje, że jej autor posiada obszerną wiedzę z zakresu Geometrii Algebraicznej i Algebry Przemiennej. Imponujący jest różnorodny aparat matematyczny wykorzystany w dowodach, nawet jeśli główne rezultaty nie mają „spektakularnego" charakteru. Wyniki przedstawione w rozprawie pochodzą z licznych publikacji (zarówno samodzielnych, jak i powstałych ze współpracy, i to nie tylko z promotorem). Oczywiście w pracy nie obyło się bez małych błędów (np. brak w dowodzie Cor. 2.11 założenia, że $a \neq 0$; a w Example 2.13, albo należy zmienić kandydata na generator cokołu, albo wykluczyć charakterystykę ciała 2), niemniej jak na 130 stronicowe dzieło jest tych błędów niewiele, a te które znalazłem są łatwe do poprawienia.

* * *

Nie mam najmniejszych wątpliwości, że **recenzowana praca spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie pana Joachima Jelisiejewa do dalszych etapów przewodu doktorskiego.** Autor pracy wykazał się bardzo solidną wiedzą na temat wielu rozmaitych zagadnień z zakresu Geometrii Algebraicznej i Algebry Przemiennej, oraz dużą oryginalnością pomysłów. W związku z tym wnoszę również o **uznanie rozprawy za wyróżniającą.**

Grzegorz Zwara

G. Zwara