

Światosław Gal
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2
50-384 Wrocław
email: swiatoslaw.gal@uwr.edu.pl

Recenzja pracy doktorskiej mgra Jakuba Paligi
pt. "Equivariant Khovanov homotopy types"

Rezultatem przedstawionej do recenzji pracy jest dowód twierdzenia, że periodyczne spektra Chowanowa zdefiniowane w preprintach z 2018 r. Soffregena i Zhang oraz Borodzika, Politarczyka, oraz Silvero, odpowiednio, są izomorficzne.

Spektra Chowanowa zostały zdefiniowane przez Lipshitz i Sakara. Są one niezmiennikami linków w S^3 , a ich zgradowana charakterystyka Eulera jest równa wielomianowi Jonesa (a homologie są równe *homologiom Chowanowa* zdefiniowanym przez tego ostatniego).

Tego typu niezmienniki „zasłużyły sobie” na zainteresowanie badaczy przekraczające zastosowania w teorii węzłów. Są interesujące *same w sobie*. Pytanie postawione przez kandydata do stopnia doktora jest bardzo zasadne a odpowiedź pełna. Może nawet *zbyt* pełna. Brakuje mi dyskusji np. na temat tego jak rzeczy wyraźniej widoczne w jednej konstrukcji tłumaczą właściwości drugiej. Albo dyskusji nt. kolejnych wyzwań w tej dziedzinie.

Tematyka rozprawy dotyczy *twardej* topologii algebraicznej. Używa współczesnego języka teorii kategorii. Konstrukcje, których równoważność jest udowodniona w rozprawie są obszerne (87 oraz 77 stron odpowiednio) oraz dość techniczne. Pomimo tego, dyplomant pisze w sposób jasny, zorganizowany choć czasami zbyt suchy i zwięzły.

Pytanie o różnoważność dwu konstrukcji jest bardzo zasadne. Wynik uważam za interesujący. Należy zatem stwierdzić, że zostały wypełnione przesłanki z art. 187 ust. 1 i 2 Ustawy z dn. 20 lipca 2018 roku *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* (tekst jednolity Dz. U. z 2023 r. poz. 742 z późn. zm.) tzn. przedstawiona rozprawa „prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w dyscyplinie [...] oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej” a jej przedmiotem jest „oryginalne rozwiązanie problemu naukowego”.

Praca doktorska jest w zasadzie dobrze zredagowana. Temat pracy, a szczególnie jej metody są bardzo techniczne. Spisanie tego w czytelny sposób (nie dla kolegi zajmującego się tą tematyką, ale np. dla recenzenta) jest wyzwaniem. Za to należy się doktorantowi szczególna pochwała.

Piszę *w zasadzie*, bo terminologia jest dość konfudująca. Np. w 2.2.2 (re)definiowany jest homotopijnie koherentny diagram (ale może koherentny diagram homotopijny?) przy pomocy diagramu topologicznego. Trochę brakowało mi przykładów na *poczucie* nowych (dla mnie) pojęć.

Wychwycone przez recenzenta błędy (czy wręcz literówki) to

- (str. 18, l.13) dwa razy s_A zamiast s_A i s_B ,
- (str. 22, l.-14) brak f przed (v) .

Druga część stwierdzenia 3.2.1 jest sformułowana błędnie. Autor zsyła się na lemat 3.14 z pracy Lawsona Lipschitza i Sarkara, choć tej części dotyczy lemat 3.15. W sformułowaniu autora postać $\Pi_{P_1, \dots, P_i} \cup \Pi_{P_{i+1}, \dots, P_n}$ przyjmują tylko ściany kowymiaru jeden.

W cytowanej pracy nie widzę *znakowanych partycji*, więc zakładam, że to notacja wprowadzona przez doktoranta. Permutościanny są ściśle związane z flagami podprzestrzeni liniowych. Rozsądnie więc opisywać sam permutościann przez „flagi” (czyli łańcuchy) podzbiorów (sum początkowych zbiorów P_i w notacji doktoranta) a nie ich przyrosty. Wtedy ściany dopowiadają podłańcuhom.

Oczywiście, uwaga w stwierdzeniu 3.2.1 nie jest nigdzie wykorzystana i nie wpływa na poprawność pracy.

Jestem pełen uznania dla dużej pracy włożonej w opanowanie trudnych współczesnych prac (napisanych w roku 2018 a opublikowanych w latach 2021 oraz 2024!). Nie jest dla mnie jednak całkowicie jasne jaka część rozprawy zawiera oryginalne wyniki doktoranta. Przynajmniej połowa tekstu (jest to stwierdzenie faktu, a nie zarzut — nie można było tego nie spisać) to opis konstrukcji (definicji i głównych wyników) z cytowanych prac.

Jeśli dobrze rozumiem, to samoistnym wynikiem są konstrukcje z rozdz. 6., które (ale czyż nie tak wyglądają wszystkie twierdzenia w teorii kategorii?) sprowadzają się do przypilnowania, że wszystkie (a jest ich niemało!) indeksy się zgadzają. Niestety nie odnalazłem tego miejsca, gdzie wpadłbym w zachwyt nad pomysłowością autora. Dlatego powstrzymam się przed wnioskiem o wyróżnienie rozprawy.

Konkludując, w mojej ocenie, złożona rozprawa doktorska spełnia zwyczajowe i ustawowe wymagania stawiane w postępowaniu o nadaniu stopnia naukowego doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka. Rekomenduję dopuszczenie doktoranta do dalszych etapów postępowania.



SRG