Wrocław, 17.07.2022

dr hab. inż. Paweł Sztonyk
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
pawel.sztonyk@pwr.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej
Pana Huberta Balsama
Podporządkowane ruchy Browna na fraktalach
i związane z nimi losowe operatory Schrödingera

W swojej rozprawie doktorskiej pan mgr Hubert Balsam rozważa procesy stochastyczne na przestrzeniach metrycznych będących d-zbiorami. Rozprawa składa się z siedmiu rozdziałów. Pierwszy z nich jest wprowadzeniem podstawowych pojęć. Trzy kolejne zawierają opis wyników otrzymanych w pracach:

- Balsam H., *Transition density estimates for subordinated reflected Brownian motion on simple nested fractals,* 2021, arXiv:2106.00081.
- Balsam H., Pietruska-Pałuba K., *Transition density estimates for relativistic α-stable processes on metric spaces,* PMS (2020), Vol. 40, Fasc. 2, 183–204.

Kolejne trzy rozdziały opisują wyniki zawarte w artykułach:

- Balsam H., Kaleta K., Olszewski M., Pietruska-Pałuba K., *Density of states for the normal Anderson model on nested fractals.*
- Balsam H., Kaleta K., Olszewski M., Pietruska-Pałuba K., *IDS for subordinate Brownian motions in Poisson random environment on nested fractals.*

Te dwie ostatnie prace nie są jeszcze dostępne publicznie, więc w niniejszej opinii opieram się wyłącznie na treści przedstawionej rozprawy doktorskiej i jej autoreferatu.

Wprowadzenie

Od ponad trzydziestu lat rozwijana jest teoria procesów stochastycznych na fraktalach. Ruch Browna na trójkącie Sierpińskiego skonstruowany został w roku 1988 w pracy M.T. Barlowa i E.W. Perkinsa, a na dywanie Sierpińskiego przez M.T. Barlowa i R. Bassa w 1989 roku. Następnie podano konstrukcję dyfuzji na zagnieżdżonych fraktalach i ogólnych przestrzeniach metrycznych. Stały się one popularne w związku z teorią nieregularnych przepływów.

Rozważano również nieciągłe procesy na fraktalach otrzymane przez podporządkowanie wspomnianych powyżej dyfuzji subordynatorem stabilnym. Najlepiej zbadane są procesy stabilne, skonstruowane przez A. Stósa w 2000 roku oraz (niezależnie) przez Z.-Q. Chena i T. Kumagai w 2003, dla których otrzymano m.in. dokładne oszacowania gęstości przejścia.

W pierwszej części rozprawy doktorskiej pan Hubert Balsam rozwija tę tematykę, rozważając procesy otrzymane przez podporządkowanie dyfuzji fraktalnej subordynatorem

P. Sz

relatywistycznym, tzw. procesy relatywistyczne, i otrzymując oszacowania ich gęstości przejścia. Jest to przypadek wyraźnie trudniejszy niż wspomniane powyżej.

Drugim tematem podjętym w rozprawie jest *całkowa gęstość stanów* (IDS) na fraktalach dla szerokiej klasy procesów podporządkowanych. Badanie tej miary ma ważną motywację fizyczną - jest to jeden z najważniejszych obiektów w mechanice kwantowej. Opisuje ona przybliżoną liczbę stanów energetycznych układu z losowym potencjałem, które zawarte są w zadanym przedziale. Dla potencjałów typu Poissona lub Andersona (kratowych) oraz dostatecznie regularnych fraktali w rozprawie doktorskiej otrzymano istnienie IDS oraz zachodzenie *całkowej osobliwości Lifschitza* - fenomenu polegającego na szybszym zaniku IDS przy brzegu obszaru w przypadku losowym niż przypadku nielosowym. Badana klasa procesów jest tutaj znacząco szersza niż w dotychczas znanych pracach.

Oszacowania gęstości przejścia

Dla procesu αd_w-stabilnego na d-zbiorze F, o gęstości przejścia $p_S(t,x,y)$, dla $\alpha \in (0,1)$, znane są następujące oszacowania

$$C_{S.1} t^{\frac{-d}{\alpha d_w}} \left(\left(\frac{t^{\frac{1}{\alpha d_w}}}{|x-y|} \right)^{d+\alpha d_w} \wedge 1 \right) \leqslant p_S(t,x,y) \leqslant C_{S.2} t^{\frac{-d}{\alpha d_w}} \left(\left(\frac{t^{\frac{1}{\alpha d_w}}}{|x-y|} \right)^{d+\alpha d_w} \wedge 1 \right),$$

dla dowolnych $x, y \in F$, $t > 0$, gdzie d_w jest tzw. wymiarem błądzenia zbioru F. Proces stabilny X_t otrzymujemy tutaj poprzez podporządkowanie, tzn. $X_t = Z_{S_t}$, gdzie Z_t jest dyfuzją fraktalną, a S_t subordynatorem α-stabilnym, o transformacie Laplace'a $\phi(\lambda) = \lambda^\alpha$.

Jeżeli w powyższym wzorze zastąpimy subordynator α- stabilny subordynatorem relatywistycznym, o transformacie Laplace'a $\phi(\lambda) = (\lambda + m^{1/\alpha})^\alpha - m$, dla pewnego $m > 0$, to otrzymamy *relatywistyczny proces αd_w-stabilny*. Ten właśnie obiekt jest głównym tematem rozważań w pierwszej części rozprawy.

Procesy takie były już dokładnie badane w przypadku $F = \mathbb{R}^d$. W szczególności otrzymano oszacowania ich gęstości przejścia zarówno dla małych jak i dla dużych czasów. Wyniki, które prezentowane są w rozprawie doktorskiej są zatem z jednej strony rozwinięciem wspomnianych powyżej oszacowań procesów stabilnych na d-zbiorach na ogólniejsze procesy, a z drugiej uzupełnieniem oszacowań procesów relatywistycznych na przypadki ogólniejszych przestrzeni.

Jeżeli przez $p_R(t,x,y)$ oznaczymy gęstość procesu relatywistycznego na d-zbiorze (F,ρ,μ), to

1. dla $t \geqslant 1$ i $x, y, \in F$ mamy

$$p_R(t,x,y) \asymp C_* t^{-d/d_w} \exp\left\{ -C_* \min\left(\rho(x,y), \left(\rho(x,y) t^{-1/d_w} \right)^{\frac{d_w}{d_w - 1}} \right) \right\},$$

2. dla $t \in (0,1)$, i $x, y \in F$ takich, że $\rho(x,y) \geqslant 1$ mamy

$$p_R(t,x,y) \asymp C_* t \exp\left\{ -C_* \rho(x,y) \right\},$$

3. dla $t \in (0,1)$ i $x, y \in F$ takich, że $\rho(x,y) < 1$ mamy

$$p_R(x,y) \asymp C_* \min\left(t\rho(x,y)^{-d-\alpha d_w}, t^{-d/(\alpha d_w)} \right),$$

gdzie stałe C_* mogą mieć różne wartości w oszacowaniach dolnych i górnych. Dla uproszczenia zakładamy tutaj też, że $d_J = d_w$, gdzie d_J jest dodatkowym parametrem (tzw. *współczynnikiem chemicznym*) występującym w pełnej wersji oszacowań. Warto zauważyć, że oszacowania te zgadzają się z oszacowaniami otrzymanymi dla procesu stabilnego dla $t < 1$ i $\rho(x, y) < 1$ oraz z oszacowaniami otrzymanymi dla procesów relatywistycznych w przypadku $F = \mathbb{R}^d$ (wtedy $d_w = 2$).

Dowody tych nierówności są dość żmudne rachunkowo, wskazują na duże umiejętności techniczne autora. Cennym ich uzupełnieniem jest otrzymana postać formy Dirichleta tego procesu.

Podobnie trudne i żmudne są dowody oszacowań zawartych w Rozdziale 4. Rozważane są tam procesy na fraktalach ograniczonych, odbijane przy dojściu do brzegu. Otrzymano w nim oszacowania gęstości przejścia odbijanego subordynowanego ruchu Browna zarówno dla subordynatorów stabilnych jak i relatywistycznych. W tym pierwszym przypadku mamy

$$p_S^M(t, x, y) \asymp p_S(t, x, y), \quad t < L^{\alpha M d_w},$$
$$p_S^M(t, x, y) \asymp L^{-Md}, \quad t \geqslant L^{\alpha M d_w},$$

gdzie p_S^M jest gęstością procesu odbijanego, a L to czynnik skalujący fraktala. W tym drugim

$$p_R^M(t, x, y) \asymp p_R(t, cx, cy), \quad t < L^{M d_w},$$
$$p_R^M(t, x, y) \asymp L^{-Md}, \quad t \geqslant L^{M d_w},$$

gdzie p_R jest gęstością procesu relatywistycznego.

Całkowa gęstość stanów i osobliwość Lifschitza

Rozważany jest tutaj model ruchu cząsteczki na fraktalu nieskończonym, modelowany przez proces Markowa z generatorem H_0. Losowość układu otrzymujemy dodając losowy potencjał V^ω, niezależny od ruchu cząsteczki. Po obcięciu otrzymanego operatora Schrödingera $H^\omega = H_0 + V^\omega$ do pewnego sympleksu Δ_M otrzymujemy operator H_M^ω, który generuje półgrupę operatorów zwartych, a zatem jego spektrum jest dyskretne i można wprowadzić miarę

$$\Lambda_{H_M^\omega} := \frac{1}{|\Delta_M|} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{\lambda_i^{H_M^\omega}},$$

gdzie $\lambda_i^{H_M^\omega}$ są wartościami własnymi operatora H_M^ω. Jeśli granica przy $M \to \infty$ istnieje, to nazywamy ją *całkową gęstością stanów (IDS)*.

W rozprawie doktorskiej udowodniono istnienie IDS dla szerokiej klasy procesów subordynowanych i dwóch rodzajów potencjałów - kratowego i Poissonowskiego. W tym pierwszym przypadku dowód jest powtórzeniem rozumowania z pracy doktorskiej dra M. Olszewskiego, a w tym drugim jego niewielką modyfikacją.

Zasadniczą część pracy stanowi jednak dowód zachodzenia osobliwości Lifschitza dla tych dwóch rodzajów potencjału. Drogą wiodącą do tego wyniku jest dwustronne oszacowanie transformaty Laplace'a IDSu oraz zastosowanie twierdzeń Tauberowskich typu eksponencjalnego. Autorzy stosują tutaj również inne zaawansowane narzędzia, takie jak wzór Feynmana–Kaca, proces warunkowany, nierówność Bernsteina, nierówność Temple'a.

Te metody dowodu wydają się być znane z literatury, zostały tutaj jednak zmodyfikowane i rozszerzone na nowe przypadki procesów i potencjałów. Pan mgr Hubert Balsam

R. Sz

wykazał się więc dobrą znajomością tych skomplikowanych metod i dużą biegłością w ich stosowaniu.

Redakcja rozprawy

Praca jest skonstruowana i zredagowana w stosunkowo czytelny i logiczny sposób. Zdecydowana większość tekstu jest napisana poprawnie i nie budzi zastrzeżeń. Można jednak zauważyć kilka miejsc, które mogły być lepiej dopracowane. Występuje tutaj trochę usterek, drobnych pomyłek i niezgrabnych sformułowań. W kilku miejscach można było nieco lepiej wytłumaczyć pewne pojęcia, podać dodatkowe przykłady. Wydaje się więc, że autor mógł nieco bardziej zadbać o czytelników. Poniżej wymieniam niektóre zauważone przeze mnie usterki. Zaznaczam, że nie wpływają one w żaden sposób na poprawność dowodów i zawartość merytoryczną pracy, nieco jednak utrudniają jej czytanie.

- W kilku miejscach (np. strona 15) są pozostałości angielskiego tekstu.
- Tłumaczenie angielskiego 'fractional diffusion' na 'dyfuzja ułamkowa' wydaje mi się nieco niezgrabne. Mowa tutaj o dyfuzjach na fraktalach, czyli dyfuzjach fraktalnych.
- W Przykładzie 1.3.1 można było nieco więcej napisać o subordynatorach stabilnych, podać ich miarę Lévy'ego. Ponadto w (3) mamy potęgę α zamiast $1/\alpha$, a w (5) zamienione miejscami granice $\lambda \to 0^+$ i $\lambda \to \infty$. W (6) zdanie o spełnieniu (1.3.4) oraz (1.3.5) jest niezręcznym powtórzeniem, ponieważ wyżej deklarujemy już, że spełniony jest warunek (B).
- Na stronie 18 również, w trzeciej linii od dołu, jest zdanie, w którym brakuje orzeczenia. Natomiast ostatnie zdanie na tej stronie (poza literówką 'uwage') jest nieco enigmatyczne, prosiłoby się o nieco dokładniejsze wyjaśnienie — w jakim sensie rozumiemy tę równość, skąd ona się wzięła.
- W podrozdziale 1.3.4 mowa jest o procesach podporządkowanych. Temat podporządkowania był poruszony wcześniej, na stronie 18, a nie widać żadnego nawiązania do tego wcześniejszego tekstu. Sprawia to wrażanie pewnego bałaganu, jakby autor zapomniał, że wcześniej już opisał to zagadnienie.
- Pierwsze zdanie w 2.2 jest niezgrabne, nie wiadomo czego dotyczy sformułowanie 'udowodnimy w nim'. Poniżej zawarta jest wzmianka o oszacowaniach gęstości przejścia na $\mathbb{R}^d$. Tutaj można było trochę staranniej sprawdzić źródła, gdyż wymieniona praca nie jest ani jedyna, ani nie zawiera najdokładniejszych oszacowań.
- Na stronie 25. uwaga 'zmieniając kolejność całkowania' jest myląca, tutaj nie ma takiej operacji, a jedną linię poniżej brakuje 1/2.
- Monotoniczność funkcji jest własnością dotyczącą zbioru, a nie pojedynczych jego elementów, zatem napis 'funkcja jest rosnąca dla $s \in I$' nie jest właściwy (chociaż powszechnie przyjęty w naszych szkołach), lepiej pisać: funkcja jest rosnąca na przedziale I.
- Definicja stałej k_4 na stronie 30. wydaje się być błędna, autor miał na myśli zapewne $k_4 = \max\{k_3, m + m^{-1/\alpha}\}$ lub podobne wyrażenie. Tak przynajmniej wynika

z rachunku poniżej. Nawias $(1/2)$ w wyrażeniu $-1/2m^{1/\alpha}s$ i następnych podobnych ułatwiłby nieco czytanie.

- Równość w definicji formy $\mathcal{E}_t$ jest błędna, po jej prawej stronie powinno być odwrotnie: $\frac{1}{t}\langle f - T_t f, f\rangle$. Oczywiście funkcja $t \to \mathcal{E}_t(f,f)$ jest niemalejąca (błędnie podano, że nierosnąca) i dlatego istnieje granica tych wyrażeń nieujemnych, ale może być nieskończona. Poza tym podwójny znak $+$ w mianowniku w oszacowaniu $\mathcal{E}_t^{stab}$.

- W kilku miejscach można było dokładniej wyjaśnić pojawiające się pojęcia i związki. W rozprawie doktorskiej nie musimy oszczędzać miejsca i można poświęcić temu trochę więcej uwagi, niż w artykułach. Na przykład można było wyjaśnić dokładniej pochodzenie oznaczenia 'Lip' i znaczenie parametrów dla dziedziny formy wprowadzone na stronie 35., wyjaśnić co rozumiemy przez środek ciężkości fraktala (str. 42.), podać definicję procesu Fellerowskiego (str. 44.), podać przynajmniej jeszcze jeden (poza trójkątem Sierpińskiego) przykład fraktala spełniającego rozważane założenia.

- Ostatnie zdanie na stronie 36. nie jest zbyt trafne, ponieważ przy zawieraniu w drugą stronę trzeba jednak użyć dodatkowo oszacowań $p(t,x,y)$.

- W definicji Ψ_2 na stronie 39. powinno być $(1/2,0)$ zamiast $(1/2,1/2)$.

- Zdanie 'Teraz przejdziemy do dowodu twierdzenia.' na stronie 50. jest nieco zagubione, skoro kilka linii wcześniej zaczyna się ten dowód.

- W definicjach 5.1.2 i 5.1.3 nie jest jasne czy ma być $M \in \mathbb{Z}$ czy $M \in \mathbb{Z}_+$, napisy są nieco sprzeczne.

- W opisie warunków $(a)-(c)$ na stronie 65. jest duży bałagan. W nierównościach w punkcie (b) brakuje (raz z lewej strony, a raz z obu stron) funkcji $\phi_1(r)$, w drugiej nierówności r' zamiast r, a w (c) brakuje dość ważnej części, odpowiedni fragment w cytowanej tutaj pracy [42] zawiera bowiem założenie spełniania warunku (b) w przypadku $\alpha_2 = \alpha_1$.

Konkluzja

Uważam, że przedstawiona rozprawa *Podporządkowane ruchy Browna na fraktalach i związane z nimi losowe operatory Schrödingera* pana Huberta Balsama **stanowi oryginalne rozwiązanie przedstawionego problemu naukowego, oraz wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną autora w dyscyplinie matematyka. Spełnia ona zwyczajowe i ustawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim.** Uważam, że pan mgr Hubert Balsam w pełni zasługuje na nadanie mu stopnia doktora.

Paweł Sztonyk

Paweł Sztonyk