RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ PANA MGR. HUBERTA BALSAMA P.T. "PODPORZĄDKOWANE RUCHY BROWNA NA FRAKTAŁACH I ZWIĄZANE Z NIMI LOSOWE OPERATORY SCHRÖDINGERA"

PROFESSOR ZDZISŁAW BRZEŹNIAK
SEPTEMBER 27, 2022

Praca doktorska pana Huberta Balsama składa się jakby z trzech częśći. Czesc pierwsza składa się z rozdziałów 1 i 3. Czesc druga składa się z rozdziałów 2 i 4, zaś część trzecia składa się z rozdziałów 5, 6 i 7.

Rozdział pierwszy poświecony jest na wprowadzeniu to tematu i zajmuję się przypomnieniem odpowiednich definicji, na przkład d-zbiorów i d-miar, dyfuzji ułamkowych i procesów podporzadkowanych. Tutaj także podane są podstawowe przykłady subordynatorów, na przykład subordynatorów α-stabilnych. Rozdział trzeci poświecopy jest wprowadzeniu do tematu tzw. "nieograniczonych fraktalów zagniezdzonych". Tutaj także podane są podstawowe definicje, na przykład własności "dobrego etykietowania", ruchu Browna i odbijanego ruch Browna na fraktalach. W podrozdziale 3.3.4 przytoczone są pewne lematy wykorzytywane pozniej przy dowodzeniu istnienia calkowej gęstości stanów (IDS). Dowody tych użytecznych wyników przytoczone są w Dodatku, czyli rozdziale 8.

Cała pierwsza część pracy jest bardzo użyteczna.

W rozdziale drugim, który jest oparty na pracy [4], podane są oszacowania gęstości przejscia dla $\alpha \mathrm{d}_w$-stabilnego procesu relatywistycznego na d-zbiorach. Wyniki z tego rozdziału uogolniają wyniki z prac [14] i [65] o oszacowanich podobnego typu ale dla procesów $\alpha \mathrm{d}_w$-stabilnych. Te ostatnie procesy moza zdefiniować jako fraktalną dyfuzję ułamkowa (n.p. ruch Browna) subordynowana poprzez α-stabilny subordynator

$$\phi(\lambda) := \lambda^\alpha, \quad \lambda > 0. \tag{0.1}$$

Te piersze procesy można zdefiniować jako fraktalną dyfuzję ułamkowa subordynowana poprzez relatywistyczny α-stabilny subordynator

$$\phi(\lambda) := (\lambda + m^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha - m, \quad \lambda > 0, \tag{0.2}$$

gdzie $m > 0$.

Glównymi wynikami tego rodziału są Twierdzenia 2.2.1 i 2.2.2, których autor podaje oszacowania od dołu i góry na gęstości przejscia dla takiego αd_w-stabilnego procesu relatywistycznego na d-zbiorach odpowiednio dla duzych i malych czasów. Te dwa przypadki są oczywiscie rozne. Te dwa twierdzenia są ciekawymi i waznymi uogolnieniami wyników ze wspomnianych wczesniej prac [14] i [65].

Rozdział drugi jest zakończony dyskusją form Dirichleta dla procesów tu rozważanych. Jest tu udowodniony ciekawy wynik, patrz Twierdzenie 2.3.1, w którym dziedzina tejże formy Dirichleta jest dokładnie scharakteryzowana poprzez odpowiednie przestrzenie typu Besowa. To jest także ciekawy i wazny wynik, który, jak sądze bedzie miał wiele zastosowan. Brakuje mi tylko stwierdzenia, czy podobny wynik dla procesów αd_w-stabilnych można znalezc w istniejącej literaturze, na przykład w pracach [14] i [65].

Rozdział czwarty jest ciekawym uogólnieniem rozdziału drugiego. Tutaj autor zajmuje się oszacowaniami (od góry i dołu) na gęstości przejscia dla stabilnego i relatywistycznego procesu odbijanego na fraktalach, tzn. dla ruch Browna subordynowanego poprzez α-stabilny subordynator (0.1) albo poprzez relatywistyczny α-stabilny subordynator (0.2). Glówne wyniki tego rozdziału, opartego na pracy [1], to Twierdzenia 4.1.1. i 4.2.2. Jak poprzednio, te wyniki są zarowno ciekawe i ważne. Według mojego rozeznania, te dwa twierdzenia są także nowe. Jesli się nie myle, to ten fakt powinien byc jakoś w pracy podkreślony. Dowody w tym, jak również w rozdziale drugim, są żmudne i pracochłonne. Naturalnym pytaniem jest, czy wynik podobny do Twierdzenia 2.3.1, zachodzi dla procesów rozpatrywanych w rozdziale czwartym?

Trzecia część pracy składa się z rozdziałów 5,6 i 7. Dotyczy ona tzw. calkowej gęstości stanow (IDS) dla losowych operatorow Schrödingera postaci

$$H^{\omega} := H_0 + V^{\omega} \tag{0.3}$$

gdzie H_0 jest generatorem pewnego zwyklego procesu Markowa, zaś V jest losowym potencjalem. Przestrzenia stanow w tym rozdziale jest zbior $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$, tzn. nieograniczonym fraktalem zagnieżdżonym z własnościa dobrego etykietowania (GLP). Autor rozpatruje kilka interesujących przypadków takiego potencjalu losowego:

(i) Potencjał typu kratowego o profilu W,
(ii) Speriodyzowany potencjał typu kratowego o profilu W,
(iii) Fraktalny potencjał Poissonowski z funkcją profilu W,
(iv) Speriodyzowany fraktalny potencjał Poissonowski z funkcją profilu W.

Założenia dotyczace każdego przypadku są dokładnie wyliczone. W podrodziale 5.1.3 autor wprowadza polgrupy i ich infinitezymalne generatory dla rozpatrywanych procesów na zbiorach $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ i $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$, dla $M \in \mathbb{N}$. To bardzo ulatwia czytanie calej pracy. Podrozdział 5.1.4 zawiera wynik typu Feynmana-Kaca, patrz Twierdzenie 5.1.1. Tutaj udowodnione jest w sczegolności, że realizacje poterncjalu typu kratowego, naleza prawie wszednie do tzw, klasy Kato. Podobny wynik poterncjalu typu Poissonowskiego jest udowodniony w Twierdzeniu 5.1.2. Tak jak wyżej, według mojego rozeznania, te dwa twierdzenia są także nowe. Tak jak wyżej, jesli się nie myle, to ten fakt powinien byc jakoś w pracy podkreślony. Glównym wynikiem tego rozdziału jest Twierdzenie 5.1.3, w którym, opierając się na poprzednich wynikach z tego rozdziału, autor dowodzi istnienia IDS dla potencjalów z dwóch powyższych typow. Autor otwarcie pisze, że "Dla potencjału kratowego dowód został podany w w pracy doktorskiej [54] jednak w nieco mniejszej ogólności. Ponieważ nie jest ona publicznie dostępna, dowód (w ogólności jak w twierdzeniu 5.1.3) również zamieszczamy w Dodatku. W przypadku potencjału Poissona dowód istnienia jest niewielką modyfikacją dowodu na trójkącie Sierpińskiego z pracy [42]." Dowod zamieszczony w dodatku jest, pomimo pewnego samokrytycyzmu autora ciekawy. Uważam, że pomiomo tego że dowód istnienia IDS w przypadku potencjału Poissona jest niewielką modyfikacją dowodu z pracy [42], to powinien on byc zamieszczony w recenzowanej pracy.

Praca zakończona jest dwoma bardzo ciekawymi rodziałami 6 i 7, w których autor rozważa tzw. osobliwości typu Lifschitza dla całkowej gęstości stanów. W pierwszym z tych rozdziałów, autor rozpatruje to zagadnienie dla dla potencjału typu kratowego. W drugim dla dla potencjałów typu Poissonowskiego. Glównym wynikiem rodziału 6 jest Twierdzenie 6.0.1, które jest uogolnieniem Theorem 1.1 z pracy [41], gdzie przypadek $\mathbb{R}^d$ by rozpatrywwany. Glównym wynikiem rodziału 7 jest Twierdzenie 7.0.1. Malym brakiem tych dwóch rozdziałów jest brak deklaracji autora na temat oryginalności i nowości tychże dwóch ciekawych wyników. Według mnie, te wyniki są także ważne.

Pan Hubert Balsam jest autorem czterch prac [1-4], Praca [4] została już opublikowana w czasopismie Probabability and Mathematical Statystics. Jest to renomowane czasopismamo. Przedstawione wyniki są bardzo trudne. Dowody są żmudne i długie. Prezentacja pracy jest bardzo logiczna i dobrze przemyslana. Autor powinien jednak poświecic wiecej uwagi na skomentowanie jak przedstawione rezultaty są zwiazane z wynikami z jego publikacji.

Nie mam żadnych wątpliwości, że przedstawiona praca jest bardzo dobrą rozprawą doktorską, która spełnia wszystkie wymagania i wnioskuję o jej przyjęcie.

References

[1] Balsam, H., *Transition density estimates for subordinated reflected Brownian motion on simple nested fractals*, 2021, available at: arXiv:2106.00081.

[2] Balsam, H., Kaleta, K., Olszewski, M., Pietruska-Pałuba, K., *Density of states for the normal Anderson model on nested fractals*, preprint

[3] Balsam, H., Kaleta, K., Olszewski, M., Pietruska-Pałuba, K., *IDS for subordinate Brownian motions in Poisson random environment on nested fractals*, preprint.

[4] Balsam H., Pietruska-Pałuba K., *Transition density estimates for relativistic $\alpha-$stable processes on metric spaces.* PMS (2020), Vol. 40, Fasc. 2, pages 183 - 204.

Department of Mathematics, The University of York, York, YO10 5DD, U.K.
Email address: `Zdzislaw.Brzezniak@york.ac.uk`