Dr hab. inż. Kamil Kaleta
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Wrocław, 28.07.2023

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Bartłomieja Polaczyka
nt. CONCENTRATION OF MEASURE AND FUNCTIONAL INEQUALITIES
napisanej pod kierunkiem dr. hab. Radosława Adamczaka, prof. uczelni
na Uniwersytecie Warszawskim

Zjawisko koncentracji miary, którego dotyczy przedstawiona do oceny rozprawa doktorska, jest jednym z głównych zagadnień współczesnej teorii prawdopodobieństwa. Chociaż tematyka ta została zainicjowana już ponad 50 lat temu, to nadal jest bardzo aktywnie rozwijana w wielu ważnych ośrodkach naukowych na świecie. Jeśli $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ jest przestrzenią probabilistyczną, to koncentracja miary jest zazwyczaj opisywana przy pomocy nierówności postaci

$$\mu\big(f - \textstyle\int f d\mu > t\big) \leqslant \alpha(t), \qquad \mu\big(|f - \textstyle\int f d\mu| > t\big) \leqslant \alpha(t), \qquad t > 0,$$

gdzie α jest pewną funkcją szybko malejącą do zera przy $t \to \infty$, a f przebiega pewną dostatecznie obszerną klasę funkcji na $\mathcal{X}$. Ze względu na liczne i różnorodne zastosowania w informatyce, fizyce statystycznej i kwantowej, analizie czy statystyce, kluczowe znaczenie ma tu jak najlepsze dopasowanie funkcji α, w tym jej kształtu oraz zależności od parametrów, które definiują rozważany model probabilistyczny, przy czym w rozprawie rozważane są głównie modele dyskretne. Jedna z możliwych technik badania zagadnienia koncentracji wykorzystuje *nierówności funkcyjne*. Jest to podejście analityczne, często bardzo efektywne, które pozwala zinterpretować badane miary jako rozkłady stacjonarne pewnych procesów Markowa (lub ich półgrup przejścia), a co za tym idzie - łączy zagadnienie zbieżności procesów do ich miar stacjonarnych z własnościami koncentracyjnymi tych miar. To piękna i różnorodna teoria, która na przestrzeni lat przyciągnęła uwagę wielu wybitnych matematyków. Zależności pomiędzy niektórymi nierównościami funkcyjnymi i ich zastosowania w teorii koncentracji miary są także przedmiotem badań tej pracy doktorskiej.

Rozprawa jest dość obszerna jak na dysertację z matematyki, liczy niemal 160 stron i jest napisana w języku angielskim. Składa się z 5 rozdziałów oraz dwóch dodatków, a bibliografia ma 202 pozycje. Rozdział 1 to bardzo użyteczne wprowadzenie do poszczególnych zagadnień rozważanych w pracy wraz z motywacją i zwięzłym opisem wkładu autora. Wyniki rozprawy zaprezentowane są w kolejnych rozdziałach, przy czym rozdział 2 jest oparty na pracy [6] [1] (napisanej wspólnie z prof. R. Adamczakiem, promotorem rozprawy, oraz dr. M. Strzeleckim i opublikowanej w prestiżowym *Journal of Functional Analysis*), rozdziały 4 i 5 są oparte na nieopublikowanych dotychczas preprintach [5] (wspólny z R. Adamczakiem) oraz [173], a rezultaty opisane w rozdziale 3 nie zostały jeszcze upublicznione. Dodajmy, że mgr Bartłomiej Polaczyk jest także autorem lub współautorem trzech innych opublikowanych artykułów naukowych.

Omówienie wyników rozprawy

Zmodyfikowana logarytmiczna nierówność Sobolewa, nierówność Becknera i oszacowania momentów. W rozdziale 2 autor udowadnia najpierw (twierdzenie 2.2.1), że *zmodyfikowana logarytmiczna nierówność Sobolewa*

$$\rho_0 \operatorname{Ent}_\mu(f) \leqslant \mathcal{E}(f, \log f), \tag{mLSI}$$

gdzie $\operatorname{Ent}_\mu(f) = \mu(f \log f) - \mu(f) \log \mu(f)$ jest funkcjonałem entropii ($\mu(f)$ oznacza $\int f d\mu$), pociąga *nierówność Becknera*

$$\alpha_p \left(\mu(f^p) - \mu(f)^p\right) \leqslant \frac{p}{2}\mathcal{E}(f, f^{p-1}) \tag{Bec-p}$$

[1] W recenzji odnoszę się do oryginalnego spisu literatury z rozprawy doktorskiej

z parametrem $p \in (1,2]$ i stała α_p jest dobrze kontolowana przez stałą ρ_0 dla wszystkich $p \in (1,2]$; $\mathcal{E}$ jest symetryczną, nieujemną formą dwuliniową, a $f \geqslant 0$ z dziedziny formy $\mathcal{E}$ są takie, że również $\log f$ i f^{p-1}, odpowiednio, należą do dziedziny $\mathcal{E}$. Następnie, budując na tym wyniku, uzyskuje nowe oszacowania momentów dla pewnych klas funkcji (stwierdzenia 2.3.1 oraz 2.3.3) i bardzo szeroko dyskutuje zastosowania (podrozdziały 2.4 i 2.5), w tym także nieróworści koncentracyjne. Dodajmy, że twierdzenie 2.2.1 uzupełnia znaną wcześniej w dość dużej ogólności przeciwną implikację (tutaj stwierdzenie A.2.3) i prowadzi do równoważności pomiędzy (mLSI) oraz (Bec-p) (dla $p \in (1,2]$), a także do wniosku, że optymalne stałe w tych nierównościach spełniają równość $\rho_0^{opt} = 2\lim_{p\to 1^+} \alpha_p^{opt}$ (wniosek 2.2.2 lub twierdzenie 2.1.1).

Twierdzenie 2.2.1 uzyskane jest w bardzo dużej ogólności, dla form $\mathcal{E}$ spełniających warunek *kontrakcji* oraz pewien warunek *monotoniczności* (założenie 1). Warunki te są częściowo motywowane przez formy Dirichleta związane z półgrupami operatorów (procesów) Markowa symetryzowanych przez miarę μ, które naturalnie mieszczą się w tej klasie. Jednak, na co zwraca uwagę autor, podstawowe motywacje dla tych rozważań wypływają z chęci zastosowania tego rezultatu do szacowania momentów i koncentracji miary dla pewnych klas funkcji, a to często wymaga nieco szerszego spojrzenia na badane nierówności funkcyjne. Dlatego taki abstrakcyjny kontekst jest bardzo wygodny. Dowód jest zredukowany do analizy funkcji ograniczonych (lemat 2.2.3). Moim zdaniem ważnym i dość pomysłowym krokiem jest sprowadzenie rozumowania do analizy funkcji pomocniczej, która powstaje poprzez odpowiednie odseparowanie wartości wyjściowej funkcji od zera. Do niej stosuje się oszacowanie pomocnicze ze stwierdzenia 2.2.9, które pozwala znaleźć dobre ograniczenie dolne na stałą w (Bec-p) dla p bliskich 1. Konkluzja wymaga zastosowania rozwinięcia Taylora oraz nierówności Czebyszewa. Finalna stała uwzględnia także bardziej bezpośrednie oszacowanie ze stwierdzenia 2.28, które może prowadzić do lepszego ograniczenia na α_p dla niektórych p. Uzyskuje się je przechodząc przez kowariancję i nierówność Poincaré. Dowód wspomnianego stwierdzenia 2.2.9 jest również bardzo ciekawy w tak dużej ogólności – opiera się na lemacie 2.2.7 dotyczącym pochodnej funkcji $s \mapsto \mathcal{E}(f, f^{s-1})$, gdy $\inf f > 0$, i wzorze wariacyjnym na entropię.

Oszacowania momentów w stwierdzeniach 2.3.1 oraz 2.3.3 wyprowadzone są z nierówności Becknera (Bec-p), przy czym pierwszy rezultat dotyczy form nielokalnych, zdefiniowanych przez odpowiednie jądra, i daje oszacowanie dla dowolnych funkcji mierzalnych, a drugi jest bardziej abstrakcyjny – został uzyskany przy założeniu 1 oraz dodatkowym założeniu 2, i dotyczy funkcji z odpowiedniej podprzestrzeni liniowej dziedziny formy $\mathcal{E}$. Dowody mają charakter indukcyjny i zostały zainspirowane metodami dla miar produktowych z podrozdziału 15.2 monografii [51]. W wielu przypadkach, w połączeniu z poprzednim wynikiem z twierdzenia 2.2.1, oszacowania te prowadzą do znacznie lepszych rezultatów, niż te otrzymane bardziej klasycznymi metodami, np. w oparciu o logarytmiczną nierówność Sobolewa (LSI). Pozwalają także uzyskiwać wyniki w sytuacji, gdy zachodzi (mLSI), ale nie ma (LSI). W rozprawie szczegółowo omówiono wiele ciekawych zastosowań, m.in. do modeli dyfuzyjnych – miar μ o podgaussowskich ogonach (wniosek 2.2.2) i typu Cauchy'ego (wniosek 2.4.3), modeli dynamiki Glaubera (wnioski 2.4.5, 2.4.7 oraz ważne przykłady na s. 31-34), wraz z nierównościami koncentracyjnymi wyższego rzędu dla wielomianów tetrahedralnych (podrozdział 2.5.3), permutacji losowych (podrozdział 2.4.4) czy przestrzeni Poissona (podrozdział 2.4.6), w tym oszacowania dla supremów poissonowskich całek stochastycznych (wnioski 2.4.22, 2.4.23).

Otwarty problem dotyczący p-logarytmicznych nierówności Sobolewa. W rozdziale 3 autor rozwiązuje otwarty problem postawiony przez Mossela, Oleszkiewicza i Sena w pracy [158] dotyczący zależności pomiędzy p-logarytmicznymi nierównościami Sobolewa dla $p \in (0,1]$ w przypadku dyskretnej przestrzeni probabilistycznej. Mówimy, że *p-logarytmiczna nierówność Sobolewa* zachodzi ze stałą $C > 0$, jeśli

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^p) \leqslant \frac{Cp^2}{4(p-1)}\mathcal{E}(f^{p-1}, f), \qquad \text{gdy } p > 0,\ p \neq 1,$$

oraz

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \leqslant \frac{C}{4}\mathcal{E}(f, \log f), \qquad \text{gdy } p = 1;$$

$\mathcal{E}$ jest tu formą Dirichleta zwiazaną z półgrupą (procesem) Markowa symetryzowaną przez miarę μ, a $f > 0$ z dziedziny formy $\mathcal{E}$ jest taka, że również f^{p-1} (odp. $\log f$) należy do dziedziny $\mathcal{E}$. W rozprawie nierówności te są oznaczane przez p-LS(C), przy czym 1-LS(C) jest *zmodyfikowaną nierównością Sobolewa* (mLSI), która jest także razważana w rozdziale 2.

Autorzy pracy [158], motywowani zastosowaniem do odwrotnej hiperkontrakcji, udowodnili, że p-LS$(C) \Longrightarrow q$-LS(C) gdy $0 < q \leqslant p \leqslant 2$. W przypadku $1 < q \leqslant p \leqslant 2$ uzyskali także odwrotną implikację q-LS$(C) \Longrightarrow p$-LS$(\tilde{C})$ ze stałą $\tilde{C} = C(q^2(p-1))/(p^2(q-1))$ i zapytali czy istnieje także przedział $I \subset (0,1]$ o dodatniej długości, taki że dla $p, q \in I$, $q < p$, zachodzi podobna implikacja ze stałą $\tilde{C} = c(I)C$, gdzie $c(I) > 0$ zależy wyłącznie od I (problem (I) w rozdziale 12 cytowanej pracy).

Twierdzenie 3.2.2, główny wynik rozdziału 3 rozprawy, orzeka, że dla każdego $p \in (0,1)$ istnieje rozkład μ na $\mathbb{N}$, dla którego q-logarytmiczna nierówność Sobolewa nie zachodzi gdy $q = p$, ale zachodzi dla wszystkich $q \in (0,p)$. Stanowi ono więc negatywne rozwiązanie tego problemu – kontrprzykładem jest *rodzina rozkładów Conwaya-Maxwella-Poissona* i związane z nią *procesy urodzin i śmierci*. Weryfikacja przebiega tutaj przy zastosowaniu twierdzenia 3.2.3, drugiego głównego rezultatu tego rozdziału, które podaje warunek wystarczający oraz bliski mu, choć nierównoważny, warunek konieczny dla p-LS(C) w klasie procesów urodzin i śmierci. Niezależnie od powyższego problemu jest to również bardzo ciekawy i dalece nietrywialny wynik. Duża część rozumowań w tym rozdziale jest bardzo trudna i zaawansowana technicznie, co przekłada się w wielu miejscach na dość długie i żmudne rachunki. Ważnym punktem startowym tych rozważań jest przeformułowanie problemu w języku pewnej funkcji pomocniczej H_p, której własności opisane są w lemacie 3.3.10. Inne ważne kroki/narzędzia to m.in. uzyskanie dostatecznie dobrej kontroli zachowania ogona miary μ (lemat 3.3.4 oraz stwierdzenie 3.3.6), redukcja do analizy niemalejących funkcji o skończenie wielu skokach (stwierdzenie 3.3.8 i wniosek 3.3.9) oraz oszacowania z lematu 3.3.11. Część pomysłów została tutaj zainspirowana metodami dla prostej rzeczywistej z pracy [26].

Oszacowania koncentracyjne na hiperkostce dyskretnej. Rozdział 4 jest poświęcony oszacowaniom koncentracyjnym na kostce dyskretnej $\{0,1\}^n$, przy czym uzyskane wyniki można podzielić na dwie grupy.

Pierwsza część wyników dotyczy szerokiej klasy miar probabilistycznych π, które mają własność SCP (ang. *stochastic covering property*). Twierdzenie 4.2.3 zawiera nierówność koncentracyjną postaci $\pi(f > \pi(f) + t) \leqslant \exp\big(-t^2/(8|\alpha|^2)\big)$, $t > 0$, dla funkcji lipschitzowskich względem odległości Hamminga $d_\alpha(x,y) = \sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{\{x_i \neq y_i\}}$ z wagą $\alpha \in [0,\infty)^n$ oraz jej wersję dla k-jednorodnych miar π (tzn. miar skupionych na zbiorze $\{x : \sum_i x_i = k\}$). Rezultat ten uogólnia (a nawet poprawia) wcześniejsze oszacowania z prac [170, 114] uzyskane dla wagi $\alpha = (1,\ldots,1)$. Twierdzenie 4.2.5, drugi wynik w tym rozdziale, zawiera wersję oszacowania z twierdzenia 4.2.3 dla funkcji o wartościach w przestrzeni macierzy hermitowskich wymiaru d, który istotnie wzmacnia oszacowania z prac [16, 146], a twierdzenie 4.2.8 uogólnia nierówność typu Bernsteina z pracy [131] do przypadku macierzy hermitowskich wymiaru d, spełniających pewne ograniczenia różnicowe. Ostatnia nierówność jest uzyskana przy nieco mocniejszym założeniu, że miara π posiada mocną własność Rayleigha, ale to wzmocnienie potrzebne jest tylko w jednym miejscu dowodu.

Rozumowania w tej części rozprawy mają charakter martyngałowy i są oparte na pewnej modyfikacji metody z pracy [170]. Jednym z kluczowych kroków jest tu odpowiedni wybór filtracji. Dowody twierdzeń 4.2.3, 4.2.5 wykorzystują oszacowania różnic martyngałowych z lematów 4.5.1, 4.5.2 oraz nierówność Azumy–Hoeffdinga (odp. macierzową wersję nierówności Azumy–Hoeffdinga), a dowód twierdzenia 4.2.8 pewną macierzową wersję nierówności Freedmana z pracy [196].

Druga część rozdziału 2 prezentuje inne podejście, oparte na zmodyfikowanej nierówności Sobolewa (mLSI). Tutaj obiektem wyjściowym jest process Markowa o wartościach w hiperkostce dyskretnej i o szczególnej dynamice (tzw. *flip-swap random walk*) oraz miara probabilistyczna π, ktora symetryzuje jego generator L (w szczególności jest miarą stacjonarną). Przykładem takiego spaceru jest model Bernoulliego–Laplace'a. Autor formułuje pewien abstrykcyjny warunek (definicja 4.4.3), który postuluje istnienie stałej $R > 0$ takiej, że

$$\max_{\substack{x \in \operatorname{supp} \pi \\ i \in \{1,\ldots,n\}}} \sum_{\{y:\, y_i \neq x_i\}} L(x,y) \leqslant R\rho(L),$$

gdzie $\rho(L)$ jest najlepszą stałą w (mLSI) dla formy związanej z L (tzw. *warunek stabilności*). Następnie, przy tym założeniu, uzyskuje odpowiedniki nierówności koncentracyjnych z pierwszej części rozdziału 4 dla takich błądzeń, stwierdzenia 4.4.7 i 4.4.9. Przy tym samym założeniu udowodniony jest także wariant nierówności Talagranda (tzw. *convex distance inequality*) oraz oszacowanie koncentracyjne wyższego rzędu dla wielomianów tetrahedralnych (stwierdzenia 4.4.10 i 4.4.11). Ważne zastosowania tych wyników do warunkowych rozkładów Bernoulliego (wraz z ciekawą konstrukcją odpowiednich procesów Markowa spełniających warunek stabilności) omówione są w podrozdziałach 4.3 i 4.7.

Rozumowania z drugiej części rozdziału 4 adaptują pomysły i argumenty wykorzystane wcześniej w literaturze, z istotnymi modyfikacjami. Autor podkreśla, że większość zastosowanych tutaj technik dowodowych była wcześniej znana, jednak sam warunek stabilności i pomysł wykorzystania go jako założenia w ogólności rozważanej klasy procesów są nowe i prowadzą do pewnego rodzaju unifikacji. Uważam to podejście za bardzo inspirujące i udane.

Oszacowania koncentracyjne dla permutacji losowych. W rozdziale 5 uzyskano nierówności koncentracyjne dla pewnych funkcjonałów permutacji losowych zbioru $[n] := \{1, \ldots, n\}$ z rozkładem jednostajnym π_n. Twierdzenie 5.2.2 zawiera oszacowanie typu Bennetta dla supremum statystyki Hoeffdinga

$$Z = \sup_{x \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^{m} a^x_{k\sigma(k)},$$

gdzie $\mathcal{X} \subset [-1,1]^n$ jest ustalonym zbiorem wektorów, $m \leqslant n$, $(a^x)_{i,j=1}^n$ jest macierzą kwadratową wymiaru n, taką że $a^x_{ij} = x_j$ dla $i \leqslant m$, $j \in [n]$, oraz $a^x_{ij} = 0$ dla $i > m$, $j \in [n]$, a $\sigma \sim \pi_n$. Oszacowanie to poprawia w niektórych przypadkach wynik z pracy [195]. Ponadto w twierdzeniu 5.3.1 uzyskano oszacowanie dla statystyk Hoeffdinga

$$f(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)},$$

gdzie $(a)_{i,j=1}^n$ jest macierzą o współczynnikach $a_{ij} \in [-1,1]$, takich że $\sum_{i,j} a_{ij} = 0$. Oszacowanie to istotnie poprawia wyniki z prac [62, 30, 11] dla dużych odchyleń.

Dowody powyższych twierdzeń wykorzystują m.in. nierówności typu Bernsteina, które wynikają z ogólniejszego oszacowania dla supremów statystyk Hoeffdinga w stwierdzeniu 5.4.1, oszacowanie oparte na argumencie Hoeffdinga dla funkcji wypukłych (lemat 5.2.1) oraz oszacowanie Ledoux z pracy [137]. Ciekawymi krokami dowodów są m.in. rozkład statystyk na te o odpowiednio dużych i małych współczynnikach oraz zastosowanie (mLSI) do transformat Laplace'a statystyk w połączeniu z odpowiednimi wariantami oszacowań Herbsta opisanymi w dodatku B.

Ocena rangi naukowej uzyskanych wyników

W rozprawie zaprezentowano wiele nowych rezultatów, istotnie rozszerzających stan wiedzy w obrębie teorii koncentracji miary i nierówności funkcyjnych. Jest to tematyka, leżąca na styku rachunku prawdopodobieństwa i analizy, która jest intensywnie rozwijana w czołowych ośrodkach naukowych na świecie. Ważny wkład w rozwój tej dziedziny mają także matematycy z Zakładu Rachunku Prawdopodobieństwa Uniwersytetu Warszawskiego i ten doktorat doskonale wpisuje się w te badania. W swojej rozprawie pan mgr Bartłomiej Polaczyk nie tylko znacząco poprawia różne wyniki należące do uznanych specjalistów w tej dziedzinie i znajduje nowe wersje znanych twierdzeń, ale także uzyskuje zupełnie nowe, moim zdaniem bardzo nietrywialne, rezultaty. W szczególności rozwiązuje trudny otwarty problem, który został postawiony przez Mossela, Oleszkiewicza i Sena ponad dziesięć lat temu. Najbardziej zainteresowały mnie rezultaty z pierwszej części rozdziału 2, rozdziału 3 oraz drugiej cześci rozdziału 4, pewnie ze względu na to, że są najbliżej moich zainteresowań badawczych. Chciałbym jednak podkreślić, że wszystkie główne wyniki uzyskane w rozprawie uważam za ważne i ciekawe. Duży wpływ na tę ocenę ma bardzo dobre umotywowanie tych badań – główne twierdzenia z każdego rozdziału są opatrzone szczegółowymi komentarzami (wraz z referencjami), które porównują je ze znanymi wcześniej rezultatami i wskazują na zastosowania.

Jeśli chodzi o rozumowania prowadzone w rozprawie, to są one w dużej części trudne i wymagające, ale także bardzo pomysłowe. Nie znalazłem w nich żadego błędu merytorycznego. Moją uwagę zwróciła natomiast biegłość autora w posługiwaniu się różnorodnymi i zaawansowanymi narzędziami, m.in. formami Dirichleta, procesami Markowa, ich półgrupami i generatorami, szerokim wachlarzem różnych nierowności funkcyjnych oraz związków między nimi, martyngałami, a także klasycznymi i bardziej nowoczesnymi (specjalistycznymi) nierównościami teorii prawdopodobieństwa i analizy. Jestem także pod wrażeniem bardzo dobrej znajomości literatury i umiejętności adaptacji znanych technik dowodowych do swoich potrzeb oraz łączenia ich z własnymi pomysłami i koncepcjami. W tym miejscu chciałbym także podkreślić rzadko spotykaną rzetelność odwołań do literatury źródłowej. Dotyczy to zarówno sformułowań twierdzeń (gdy autor porównuje swój wynik z rezultatami otrzymanymi przez innych badaczy), jak i rozumowań w dowodach (gdy autor chce podkreślić, że skorzystał ze znanej wcześniej techniki, zaadaptował jakieś podejście lub jedynie zainspirował się jakimś pomysłem).

Jak już wspomniałem na początku, rozdział drugi rozprawy ukazał się w prestiżowym periodyku *Journal of Functional Analysis*. Sądzę, że wyniki z pozostałych rozdziałów także zasługują na publikację w wiodących i bardzo dobrych czasopismach matematycznych.

Ocena jakości prezentacji wyników i redakcji rozprawy

Strukturę rozprawy, sposób prezentacji wyników, jakość redakcji, także od strony językowej, oceniam bardzo pozytywnie. Chciałbym zaznaczyć, że praca jest napisana bardzo starannie, z dużą dbałością o szczegóły i zawiera tylko nieliczne usterki językowe. Materiał jest podzielony na cztery niezależne części, które dotyczą różnych tematów, przy czym rozdziały 2, 4 i 5 podążają dość wiernie, choć z pewnymi modyfikacjami, za treścią publikacji i preprintów autora dostępnych w repozytorium arXiv. Rozdział 3 jest z pewnością dopiero przygotowywany do publikacji. Uważam taką strukturę rozprawy za przejrzystą i racjonalną, choć wiąże się to z pewnymi rozbieżnościami w oznaczeniach (np. całek względem miary μ lub przestrzeni Lebesgue'a) czy sposobie prezentacji niektórych nierówności funkcyjnych. Każdy rozdział zawiera swoje wprowadzenie, a całość rozprawy jest opatrzona treściwym i bardzo informatywnym wstępem oraz dwoma bardzo użytecznymi dodatkami.

Niestety niektóre części rozumowań zostały zaprezentowane bardzo skrótowo lub wręcz pominięte. Tekst rozprawy jest już na tyle długi, że taki sposób redakcji jest zrozumiały, ale czasem dopisanie krótkiego uzasadnienia lub jednego zdania wyjaśnienia byłoby bardzo pomocne i znacznie usprawniałoby czytanie (np. w dowodzie pierwszej nierówności w lemacie 3.3.4 lub pierwszej nierówności w (5.2.7)). Równoważność nierówności Poincaré i Hardy'ego omówiona w uwadze 3.3.3 (a w szczególności nierówność pomiędzy stałymi $2\mu_0\hat{C}_H \leqslant \hat{C}_P$) jest ważnym elementem dowodu stwierdzenia 3.3.6. Ten fakt mógłby być sformułowany w postaci lematu wraz z dokładnym dowodem, być może zamieszczonym w dodatku, lub dokładną referencją. Dowody lematów 2.2.3 i 2.2.7 są ciekawe w tej ogólności i mogłyby się znaleźć w podrozdziale 2.2.2.

Inne drobne uwagi i niektóre zauważone usterki pozwalam sobie wymienić poniżej w wersji skróconej (oddzielone średnikami): w czwartej linii drugiego akapitu na s. 12 dwukrotnie pojawia się d zamiast n, a funkcja V poniżej jest określona na $\mathbb{R}^n$; „$\mathcal{E}(f,g)$" zamiast „$\mathcal{E}(f,f)$" w ostatniej linii na s. 14; sformułowanie wniosku 2.2.2 na końcu podrozdziału 2.2.1 jest tożsame ze sformułowaniem twierdzenia 2.2.1 i mogłoby zostać pominięte; zdanie poprzedzające założenie 2 na s. 20 wydaje mi się nieco niezgrabne; funkcje f w sformułowaniu wniosku 2.4.2 są określone na E; „Theorem 2.3.1" w drugim akapicie na s. 53 to „Proposition 2.3.1"; h zamiast t w definicji generatora na s. 60 oraz w dodatku A na s. 143; twierdzenie 3.1.6 powinno zawierać także odwolanie do [158, Proposition 3.3], z którego pochodzi druga część tezy; ostatnie zdanie twierdzenia 3.2.2 odwołuje się (jak sądzę) do podrozdziału 3.1.1, a nie do problemu o tym numerze – być może właśnie nadanie numeru sformułowaniu problemu pod twierdzeniem 3.1.6 byłoby najlepszym rozwiązaniem; początek rozdziału 3.2: skoro μ jest miarą na $\mathbb{N}$, to wyrażenie „$\mu[k, \infty)$" oznacza jednak „$\mu(\{k, k+1, \ldots\})$"; w dalszej części rozdziału 3.2 ta sama notacja $\mu[t, \infty)$ jest wykorzystywana dla t rzeczywistych; sformułowanie twierdzenia 3.2.3 odsyła raczej do (3.2.2), a nie do (3.2.1.); funkcja ε_p w sformułowaniu stwierdzenia 3.3.6 jest określona na zbiorze $[0, \infty)$; nawias kwadratowy na zewnątrz sumy w definicji funkcji f_M na s. 76 wydaje się zbędny; kostka dyskretna w rozdziale 4 jest oznaczana przez B_n podczas, gdy we wstępie do tej części w rozdziale 1 była oznaczana przez Ω; numery rozdziałów 4.2 i 4.3 w pierwszym zdaniu podrozdziału 4.4.3 są zamienione; w liniach 3-5 drugiego akapitu na s. 112 mamy „a" zamiast „a^x" oraz „a_{ij}" zamiast „a^x_{ij}" (dwa wystąpienia).

Rozprawa zawiera bardzo nieliczne usterki redakcyjne, co jest moim zdaniem dużym osiągnięciem w przypadku tak długiego tekstu. Ponadto większość moich uwag powyżej ma charakter subiektywny. Nie wpływają one więc znacząco na moją ocenę redakcji rozprawy.

Konkluzja

Z opinii przestawionej powyżej jednoznacznie wynika, że rozprawa doktorska pana mgr. Bartłomieja Polaczyka stanowi oryginalne rozwiązanie kilku trudnych problemów naukowych, w tym otwartego problemu postawionego przez uznanych specjalistów, i prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną autora w dyscyplinie. Spełnia więc, i to z naddatkiem, wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. W związku z tym, wnoszę o przyjęcie tej rozprawy i dopuszczenie pana Bartłomieja Polaczyka do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora.

Ponadto, ze względu na to, że praca zawiera szereg ważnych rezultatów (moim zdaniem z tego materiału można by wytworzyć nawet dwie solidne rozprawy doktorskie!) i została zredagowana z dużą starannością, chciałbym zaproponować komisji doktorskiej sformułowanie wniosku o uznanie tej rozprawy za wyróżniającą.

Kamil Kaleta

Kamil Kaleta