Wydział MiNI
Politechnika Warszawska
Koszykowa 75
00-662 Warszawa

10 czerwca 2020

Dziekan Wydziału MIM UW
prof. dr hab. Paweł Strzelecki
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Adama Śpiewaka.

Tematem rozprawy jest analiza własności układów dynamicznych oraz układów dynamicznych z elementem losowości z punktu widzenia geometrycznej teorii miary. Tego typu tematyka jest obecnie istotnie rozwijana z kilku względów. Jako pierwszy można wymienić atrakcyjność z punktu widzenia matematycznego ze względu na możliwość użycia zespołu rożnorodnych narzędzi, a w szczególności typowych metod teorii układów dynamicznych, analizy, teorii miary, kombinatoryki, a niekiedy arytmetyki i algebry. Metodami dynamicznymi można uzyskać wyniki i przykłady, które są interesujące i trudne choćby z punktu widzenia teorii miary. Dodatkowym żródłem motywacji i problemów są także zastosowania.

Twierdzenie Takensa, które stanowi motyw przewodni pierwszej części rozprawy, ma właśnie rodowód w zastosowaniach. Pytanie jest bardzo naturalne - a więc do jakiego stopnia mając pewien układ dynamiczny, czyli model z punktu widzenia zastosowań, możemy ustalić jego stan na podstawie ciągu czasowego utworzonego z wartości pewnej funkcji, czyli obserwowalnej wartości w modelu, w kolejnych momentah czasu. Wydawałoby się, że dla układu o k stopniach swobody k obserwacji, to znaczy wartości badanej funkcji w czasach od 0 do $k-1$, powinny wystarczyć. Okazuje się jednak, że tak nie jest, są kontrprzykłady i ogólnie potrzeba więcej niż $2k$ obserwacji.

Jednym z głównych osiągnięć pracy jest uzyskanie intuicyjnego oszacowania przez k w kontekście probabilistycznym, co zresztą było podejrzewane przez innych autorów, ale bez dowodu. Ogólnie rzecz biorąc rolę "liczby stopni swo-

body" gra wymiar Hausdorffa rozważanego układu. Jest też jasne, że funkcja, której wartości tworzą szereg czasowy, nie może być całkiem dowolna, nie powinna być na przykład stała, a stąd zakłada się, że jest typowa w odpowiednio zdefiniowanym sensie. Co przy tym kluczowe, na przestrzeni fazowej zakładamy także istnienie pewnej miary borelowskiej μ, która nie musi jednak być związana z dynamiką. Jeden z podstawowych wyników pracy jest taki, że wtedy po wyrzuceniu z przestrzeni fazowej zbioru miary zero, wartości zadanej funkcji w k kolejnych punktach orbity pozwalają jednoznacznie wyznaczyć punkt początkowy, o ile tylko k jest wieksze od wymiaru Hausdorffa układu. Rezultat ten jest następnie wzmocniony w ten sposób, że nie tylko przekształcenie ϕ z przestrzeni fazowej w ciągi czasowe jest $1-1$, ale miary przeciwobrazów kul $\phi^{-1}\big(B(\phi(x),\epsilon)\big)$ znormalizowane do 1 zbiegają słabo z gwiazdką do delty Diraca w x wraz z ϵ dążącym do 0. Tak więc, przeciwobrazy małych kul pod działaniem ϕ kurczą się do x w sposób równomierny względem miary μ. Ta silniejsza wersja pozwala na dowód kilku dalszych przypuszczeń znajdujących się w literaturze.

Druga część pracy dotyczy przykładu, który pojawił się stosunkowo niedawno w pracy Alsedy i Misiurewicza. Chodzi tu pary kawałkami liniowych rosnąych przekształceń odcinka z dynamika o charakterze losowym, która formalnie jest produktem skośnym odcinka nad przestrzenią probabilistyczną ciągów prób Bernouilliego: mając ciąg i punkt, interpetujemy pierwszy element ciągu jako losowanie jednego z dwóch przekształceń odcinka, przez który przenosimy punkt, jednocześnie przesuwając ciąg o 1. Taki układ jest blisko związany z iterowanym układem funkcji, w którym rozważamy wszystkie możliwe złożenia dwóch generujących funkcji bez jakiegokolwiek rozkładu prawdopodobieństwa. W sytuacji produktu skośnego powstaje pytanie o istnienie i własności miar stacjonarnych na odcinku. Istnienie i jednoznaczność takich miar wynika z ogólnej teorii, natomiast przedmiotem badań są ich własności. Chodzi własności takie jak osobliwość względem miary Lebesgue'a, wymiar Hausdorffa, lub związek z klasą sprzężenia topologicznego dla odpowiadających iterowanych układów funkcji. Można z niewielka tylko dozą przesady powiedzieć, że rozprawa rozwiązuje przykład Alsedy i Misiurewicza w sytuacji bez nachodzenia (non-overlapping) dla odpowiadających iterowanych ukladów funkcji.

Obie części rozprawy wywodzą się ze wspólnych prac autora K. Barańskim, promotorem rozprawy, oraz Y. Gutmanem.

Choć te dwa rozdziały łączy pewne podobieństwo podejścia, to różnią się dość znacznie pod względem stopnia trudności i charakteru stosowanych technik. Omówię zatem je zatem pod względem technicznym oddzielnie. Jak wiadomo, narzędzia geometrycznej teorii miary są różnorodne, ale w swej istocie nie bardzo skomplikowane. Dużą rolę odgrywa zręczny dobór pokryć rozważanych zbiorów, do tego dochodzi transformata Fouriera, twierdzenie Fubiniego oraz szereg wyników swoistych dla tej teorii takich jak twierdzenie Marstranda czy lemat Frostmana. Kluczem do sukcesu jest tu biegłe opanowanie tych nie zawsze intuicyjnych narzędzi oraz ich pomysłowe zastosowanie. Jak się wydaje, w pierwszej części pracy najistoniejsze jest twierdzenie 3.15 - probabilistyczne twierdzenie o zanurzeniu. Zwraca w nim uwagę pomysłowe zastosowanie twierdzenia Fubinego wplecione w strategie wyboru pokrycia zbioru wyjątkowego. Jest to bardzo elegancki argument, nie zajmujący wiele miejsca, ale z pewnością nie było łatwo na ten pomysł ani wpaść, ani dojść do przedstawienia dowodu w jasny i zwięzły sposób. Główny wynik dotyczący probalistycznego twierdzenia Takensa wynika podobną metodą. Z kolei jego wzmocnienie poprzez wykazanie zbieżności miar małych kul wynika z użycia mniej znanego twierdzenia D. Simmonsa dotyczącego charakteryzacji układu odpowiednich miar warunkowych. Ta część pracy kończy się rozważaniem szeregu przykładów. Najwięcej miejsca zajmuje analiza kontrprzykładu Kana w którym *żadna* funkcja liniowa nie pozwala na jednoznaczną rekonstrukcję stanu układu na *całej* przestrzeni fazowej. Aby przekonać się, że nie ma tu jednak sprzeczności z jego głównym twierdzeniem, autor konstruuje naturalną miarę i pokazuje bezpośrednio, że jednoznaczność zachodzi po wyrzuceniu zbiory miary zero. Nie zachodziła potrzeba użycia transformaty Fouriera, ale ogólnie ta część pracy jest oparta na pomysłowym zastosowaniu narzędzi analitycznych i teorii miary, a tylko w niewielkim stopniu na rozumowaniach dynamicznych - właściwie wchodzi tu tylko pojęcie orbity.

Inaczej jest w drugiej części rozprawy mającej do czynienia z przykładem Alsedy i Misiurewicza. Głównym krokiem jest tu zrozumienie dynamiki iterowanego układu funkcji, czego dokonuje się w sekcji 4.4 przy okazji dowodu twierdzeń 4.10 i 4.12 w przypadku $\ell = 1$. Jest to zatem rozważanie typowo dynamiczne. Następnie główne rezultaty pracy dają sie osiągnąć bezpośrednio przy użyciu dość prostych, choć nader eleganckich rachunków algebraicznych i bezpośrednich konstrukcji. Należy tu podreślić, że w kluczowych przypadkach rozważany iterowany układ funkcji spełnia warunek silnego rozdzielenia (strong separation), co zdecydowanie ułatwia rozważania o charak-

terze miarowym.

Oceniając matematyczne walory pracy, trzeba podkreślić zarówno jest pomysłowość, jak i bardzo wysoki poziom warsztatowy. Inwencję autora widać zarówno w bezpośrednich rozważaniach dynamiki i własności miarowych przykladu Alsedy i Misiurewicza, jak i w zastosowaniu bardziej abstrakcyjnych narzędzi w pierwszej części pracy. Przy znacznej oryginalności podejścia, nieuchronny zapewne ból tworzenia pracy jest już dla czytelnika rozprawy niewidoczny. Dowody są dopracowane pod względem technicznym i zaprezentowane w sposób jasny i czytelny. Jako pewien wymowny szczegół chciałbym tu przytoczyć dowód lematu 3.17 ze zwięzłym i precyzyjnym argumentem algebraicznym. Wśród nawet wytrawnych dynamików staranne i umiejętne podejście do zagadnień algebraicznych nie jest częste. Notacja jest starannie przemyślana i objaśniona w w ten sposób, że nawet przy lekturze tak obszernej pracy niewiele czasu strawiłem na szukanie oznaczeń.

Co nieuchoronne, natrafiłem na parę miejsc, w których można by coś w pracy poprawić. W oszacowaniu (3.3) wydaje mi się, że powinien być pierwiastek z k, a nie N, co ma też dalsze konsekwencje np. w ciągu oszacowań na środku str. 22. Ostatnie zdanie na str. 21 jest źle zbudowane gramatycznie, częściowo ze wzgledu na niezręcznie wtrącona uwagę w nawiasie. Na str. 26 tuż nad nierównością (3.5) sformułowanie "can be written as one condition" jest nieprecyzyjne, chodzi o to, że "follow from one condition". Ogólniej, wydaje się że autor ma pewną skłonność do nazbyt formalnego zapisu kosztem przejrzystości. Na przykład u góry strony 20, czy nie prościej by było napisac, że E_k^N to po prostu macierze $k \times N$ traktowane jako podzbiór $\mathbb{R}^{kN}$ z miarą Lebesgue'a? Z kolei próba nieformalnego opisu konstrukcji zbioru Λ na str. 52 wydaje mi się nieczytelna. Na szczęscie jest rysunek 4.3, a przy tym formalny zapis jest na tyle przejrzysty i czytelny, że można się z niego zorientować, o co chodzi. Są to, jak widać, drobne utyskiwania bez wpływu na wartość naukową rozprawy.

Jeśli idzie o głębię, poziom trudności i znaczenie rezultatów, to wyżej stawiam pierwszą część rozprawy. Rozwiązuje ona otwarte przypuszczenia należące do ważnego nurtu badań w układach dynamicznych, zatem bez wątpienia trudne. Rozwiązanie to wymagało pomysłowego doboru i zastosowania dość zaawansowanych narzędzi, na wysokim poziomie abstrakcji wymuszonym przez ogólny charakter problemu. Zaletą cześci drugiej jest to, że dotyczy bardzo ładnego przykładu, o wielkiej prostocie, a niemniej prow-

dzącego do bogatej problematyki. Wydaje mi się jednak, że przypadek bez zachodzenia okazał się stosunkowo łatwy i po zrozumieniu dynamiki iterowanego problemu funkcji potrzebne było jedynie dość elementarne podejście do problemów miarowych. Zapewne znacznie wyższy byłby poziom trudności w przyadku z zachodzeniem (overlapping) i o to chętnie spytam autora na obronie. Podsumowując uważam, że druga część rozprawy spełnia warunki stawiane pracom doktorskim w stopniu bardzo dobrym, podobnie jak i cześć pierwsza, która jednak poza te oczekiwania wyraźnie wykracza podając rozwiązanie trudnych i ważnych dla dziedziny problemów, co stanowi standard osiągnięcia habilitacyjnego.

Wypada jeszcze zastanowić się nad możliwością wyróżnienia pracy. Jak wynika z podsumowania, które zamieściłem powyżej, pod względem wartości matematycznej rozprawa na to zasługuje. Przeszkodę stanowi jednak fakt, że powstawała na kanwie wspólnych prac. Nie ma oczywiście podstaw do kwestionowania tego, że Doktorant jest samodzielnym autorem treści rozprawy. Jednak inspiracja matematyczna jest kluczowym elementem każdego osiągnięcia, a w przypadku prac zespołowych trudno jest dociekać jej źródła. Z pewnością trudniej jest doktorantowi, który musi jej szukać sam.

W konkluzji stwierdzam, że przedstawiona rozprawa bez wątpliwości spełnia wymogi ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskich i powinna stanowić podstawę do dopuszczenia jej autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Grzegorz Świątek