Prof. dr hab. Piotr Oprocha
Akademia Górniczo-Hutnicza
Wydział Matematyki Stosowanej
al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków

e-mail: oprocha@agh.edu.pl

Kraków, 25 maja 2020

RECENZJA
rozprawy doktorskiej **mgra Adama Śpiewaka** zatytułowanej
„Geometric properties of measures in finite-dimensional dynamical systems"

Rozprawa doktorska mgra Śpiewaka, będąca przedmiotem tej recenzji, składa się z 92 stron i podzielona została na 4 rozdziały. Zawiera spis treści oraz bibliografię i krótkie podsumowanie wyników doktoranta. Rozprawa napisana jest w języku angielskim, ale dołączono do niej 8 stronicowy autoreferat/rozszerzone streszczenie. Rozprawa została napisana pod kierunkiem dr. hab. Krzysztofa Barańskiego, prof. UW, podzielona została na dwie zasadnicze części, z których pierwsza oparta jest na jeszcze nie opublikowanym manuskrypcie przygotowanym we współpracy z Y. Gutmanem i K. Barańskim ([8] według bibliografii rozprawy), natomiast druga część opiera się na opublikowanej już pracy wspólnej z K. Barańskim (pozycja [9]).

Pierwsza cześć rozprawy skupia się na twierdzeniach typu Takensa, które mówiąc bardzo ogólnie, pozwalają identyfikować stan układu na podstawie mierzonego w czasie każdej iteracji parametru $h(T^i(x))$ obserwowanego przez odpowiednio długą liczbę iteracji $i = 0, 1, \ldots, k$. Twierdzenia te pozwalają oszacować niezbędną, minimalna liczbę k, niezależną od wyboru (nieznanego) punktu startowego x. Druga część rozprawy dotyczy dynamiki tzw. układów Alsedy-Misiurewicza (układów zadanych przez dwa homeomorfizmy odcinka $[0, 1]$, każdy o dwóch przedziałach monotoniczności), a dokładniej ich miar stacjonarnych. Na pierwszy rzut oka już widać, że są to dwa dość odległe tematy. Jednak rozprawa skupia się bardziej na narzędziach niż na samyc h problemach, a elementem łączącym jest szeroko rozumiany wymiar miary, w pierwszym przypadku referencyjnej, w drugim stacjonarnej. Będzie to bardziej widoczne w dalszej części recenzji, gdy przejdę do omówienia najważniejszych wyników rozprawy.

Pierwszy rozdział stanowi szersze wprowadzenie do tematyki, opisując w sposób dość obszerny wcześniejsze wyniki innych autorów, motywację do podjęcia rozważań oraz główne wyniki osiągnięte przez autora.

Rozdział 2 stanowi eleganckie i użyteczne wprowadzenie do głównych pojęć rozważanych w rozprawie. Znajdziemy w nim: elementy teorii wymiaru, w tym różne definicje wymiaru i podsumowanie zależności między nimi; pojęcia z zakresu wymiaru miar probabilistycznych; podstawowe własności wymiaru miar stacjonarnych (dla IFSów) oraz powiązanych z nimi atraktorów; związki pomiędzy wymiarem atraktora a wykładnikami Lapunowa czy entropią.

Rozdział 3 stanowi pierwszą, zasadniczą część rozprawy. Rozważa się w nim tak zwane probabilistyczne twierdzenie Takensa. Klasyczna wersja tego twierdzenia mówi, że gdy M jest gładką rozmaitością wymiaru m, $T\colon M \to M$ jest dyfeomorfizmem klasy C^2 a

$h\colon M \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem klasy C^2 (reprezentującym obserwowany parametr), przy czym T, h są typowe (w sensie kategorii Baire'a) to odwzorowanie

$$x \mapsto (h(x), h(T(x)), \ldots, h(T^{2m}(x)))$$

jest iniekcją. Innymi słowy, znając wartość parametru h w $k > \dim(M)$ krokach czasowych jesteśmy w stanie odtworzyć stan początkowy. Przy czym odwzorowanie „typowe" jest tutaj rozumiane w sensie topologicznym. Twierdzenie Takensa w wersji probabilistycznej ma podobny charakter, przy czym typowość w tym przypadku wypowiada się w języku teorii miary. Liczy się przy tym, że rozważanie prawie wszystkich a nie wszystkich elementów pozwoli obniżyć graniczną wartość k.

Pierwszym z głównych wyników tego rozdziału jest Twierzenie 3.15 stanowiące rozszerzenie wersji probabilistycznej twierdzenia Takensa. Motywację stanowi twierdzenie w wersji Sauera, Yorke'a i Casdagli (przytoczone za monografią [81]) które ma zastosowanie dla zwartego zbioru $X \subset R^N$, odwzorowania iniektywnego $T\colon X \to X$ bez punktów okresowych spełniającego warunek Lipschitza oraz funkcji Lipschitzowskiej $h\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Jeśli $h_1, \ldots, h_m$ stanowi bazę przestrzeni wielomianów rzeczywistych N zmiennych stopnia co najwyżej k, gdzie $k > 2\overline{\dim}_B X$ to dla dla prawie wszystkich względem miary Lebesgue'a wyborów współczynników $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ odwzorowanie

$$\phi_\alpha^T\colon X \to \mathbb{R}^k, x \mapsto (h_\alpha(x), h_\alpha(T(x)), \ldots, h_\alpha(T^{k-1}(x)))$$

jest iniekcją na X, gdzie

$$h_\alpha(x) = h(x) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j h_j(x).$$

Rozszerzenie wprowadzone przez autora, doprowadzające do Twierdzenia 3.15 polega na użyciu miary Borelowskiej σ-skończonej na X która jest singularna względem mairy Hausdorffa $\mathcal{H}^{\beta k}$ na $\mathbb{R}^N$ dla pewnych $\beta \in (0, 1]$ oraz $k > 0$. W ten sposób zezwala się by funkcja T miała punkty okresowe o ile $\mu|_{\mathrm{Per}_p(T)}$ jest singularna względem $\mathcal{H}^{\beta k}$ dla $p = 1, 2, \ldots, k-1$. Wielomiany zastąpione zostają przez rodzinę $2k$-interpolującą złożoną z funkcji β-Hölderowskich. Natomiast cenę którą trzeba za te modyfikacje zapłacić, jest fakt, że ϕ_α^T jest iniekcją na zbiorze X_α pełnej miary μ. Konsekwencją tego podejścia (Twierdzenie 1.2) jest obniżenie wymiaru k (czyli ciągu potrzebnego do rekonstrukcji) z $k > 2\overline{\dim}_B X$ do $k > \dim_H(\mu)$ (wyjaśnia to szczegółowo Uwaga 3.6). Twierdzenie 3.15 jest też istotnym elementem składowym dowodu twierdzenia 3.24, które to twierdzenie pozwala odpowiedzieć pozytywnie na [85, Conjecture 1], poprawiając dodatkowo przewidywane w tej hipotezie oszacowanie na k (przy czym nie sprecyzowana "typowość" z pracy [85] jest rozumiana tutaj w sensie miary Lebesgue'a). Ciekawe uzupełnienie wyników rozdziału 3 stanowi twierdzenie 3.25 które wskazuje na miarę probabilistyczną μ na $[0, 1]^2$ o tej własności, że $\dim_H \mu = 1$ ale $\underline{\dim}_{MB}\mu = 2$. Pokazuje to, że twierdzenie 3.5, stanowiące swoiste przygotowanie do dowodu twierdzenia 3.15 jest istotnym rozszerzeniem podobnego wyniku z [1]. Rozdział 3 zamyka przykład zamieszczony w podrozdziale 3.6.1, motywowany konstrukcją Ittai Kan (co ciekawe, przedstawionego w dodatku do [84] której to pracy nie jest on autorem; jego nazwisko pojawia się tylko przy sekcji Appendix). Konstruowany jest tam zbiór $X \subset \mathbb{R}^2$ spełniający warunek $\dim_H X = 0$ na którym żadne odwzorowanie liniowe $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nie jest liniowe. Z drugiej strony konstruowana jest σ-skończona miara Borelowska μ spełniająca warunek $\operatorname{supp} \mu = X$ (czyli $\sim_H \mu = 0$) oraz zbiór $X_L \subset X$ pełnej miary μ taki, że każde odwzorowanie liniowe $L(x, y) = \alpha x + \beta y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, jest iniektywne na X_L. Ten zaskakujący dualizm jest konsekwencją twierdzenia 3.5, tzn. X_L istnieje dla prawie wszystkich α, β, natomiast autor jest w stanie dodatkowo wskazać ten zbiór „dobrych" parametrów α, β w sposób jawny.

Drugą istotną część rozprawy stanowi rozdział 4, w którym rozważane są układy Alsedy-Misiurewicza, czyli działanie grupy wolnej zadanej przez dwa odwzorowania ciągłe, kawałkami liniowe

$$f_-(x) = \begin{cases} a_- x & \text{, gdy } x \in [0, x_-] \\ 1 - b_-(1-x) & \text{, gdy } x \in [x_-, 1] \end{cases}, \quad f_+(x) = \begin{cases} b_+ x & \text{, gdy } x \in [0, x_+] \\ 1 - a_+(1-x) & \text{, gdy } x \in [x_+, 1] \end{cases}.$$

gdzie $1 < a_- < 1, b_-, 0 < a_+ < 1 < b_+$. Rozważania dotyczą własności miar stacjonarnych, tzn. miar spełniających warunek

$$\mu = p_-(f_-)_*\mu + p_+(f_+)_*\mu$$

gdzie wektor prawdopodobieństwa (p_-, p_+) jest z góry ustalony. Wcześniejsze badania wykazały, że gdy wykładniki Lapunowa spełniają $\Lambda(0), \Lambda(1) > 0$ to istnieje jedyna miara stacjonarna μ dla (f_-, f_+) nie posiadająca atomów w $\{0, 1\}$. Celem podjętym w rozprawie jest ustalenie zakresu parametrów $a_\pm, b_\pm$ gwarantujących, że μ jest miarą Lebesgue'a oraz wskazanie przypadków kiedy μ jest względem miary Lebesgue'a singularna. Pierwszy z tych przypadków opisuje twierdzenie 4.4. Okazuje się, że warunkiem koniecznym i wystarczającym (przy założeniu o wykładnikach Lapunowa) jest by (f_-, f_+) był typu granicznego (tzn. $f_-(x_-) = f_+(x_+)$) oraz zachodził warunek $p_-/a_- + p_+/b_+ = 1$. Jest to istotne rozszerzenie wyniku z [2] opisujący pewien szczególny przypadek gdy μ jest miarą Lebesgue'a. Dodatkowo autor uzasadnia, że miara stacjonarna μ musi być singularna lub absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a, tzn. nie jest możliwy przypadek mieszany. Drugie przypadek, dotyczący singularności miary stacjonarnej μ motywowany jest bezpośrednio hipotezą z [2] dotyczącą typowych układów (f_-, f_+) . Częściową odpowiedź przynosi twierdzenie 10, mówiące o tym, że dla układów (f_-, f_+) typu rozłącznego (tzn. $f_-(x_-) < f_+(x_+)$) wykazujących rezonans posiadają własność $\dim_H(\operatorname{supp}\mu) < 1$. Zawiera ono także pewne dodatkowe charakteryzacje $\operatorname{supp}\mu$. Rozprawa także zawiera opis sytuacji, w której mimo, że $\operatorname{supp}\mu = [0, 1]$ to μ jest singularna względem miary Lebesgue'a (twierdzenie 4.16). Dowody są długie i technicznie zaawansowane. Widać, że z łatwością porusza się pomiędzy rozważanymi pojęciami oraz jest w stanie w sposób elegancki dzielić dowód na mniejsze kroki.

Rozprawa napisana jest w sposób staranny i przemyślany. Pomimo, że nie udało się uniknąć pewnych drobnych błędów edytorskich, typu „(??)”” nas stronie 24, językowych typu „there exists $i_1, \ldots, i_n$” w wypowiedzi Lematu 4.36, to jednak wydają się one być bardzo sporadyczne. Pewnym mankamentem jest to, że praca wielokrotnie wymusza na czytelniku dokładne sprawdzanie przeliczeń. Przykładowo funkcja $\phi_r(x) = \rho - \rho^r x$ ze strony 52 przekształca zbiór

$$I_{-1} = \left[\frac{\rho - \rho^2}{1 - \rho^{k+1}}, \frac{\rho - \rho^{k+1}}{1 - \rho^{k+1}}\right]$$

w siebie, gdy $r = 1, \ldots, k$, co jest podawane bez dalszego komentarza. Jest to oczywiście tylko przykład, gdyż takich miejsc jest dość dużo. Pewnym usprawiedliwieniem może być związek pracy z opublikowanymi artykułami, jednak w sytuacji gdy rozprawa nie ma górnych ograniczeń na objętość, autor mógł zadać sobie więcej trudu zwiększając czytelność pracy.

Art. 13 ust. 1. *ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki* stwierdza, że „Rozprawa doktorska, [...] powinna stanowić oryginalne rozwiązanie problemu naukowego lub oryginalne dokonanie artystyczne oraz wykazywać ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w danej dyscyplinie naukowej lub artystycznej oraz

umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej". W mojej opinii przedstawiona rozprawa w pełni spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane wobec rozpraw doktorskich, rozszerzając w sposób istotny wiedzę z zakresu teorii wymiaru stosowanej do układów dynamicznych. Rozważane problemy wynikają w sposób naturalny z wcześniejszych badań innych autorów i odpowiadają na stawiane w literaturze pytania otwarte. Autor bez problemów porusza się pomiędzy pojęciami z teorii miary i w bardzo ładny sposób stosuje ją do zagadnień z teorii układów dynamicznych, prowadząc często dość skomplikowane technicznie rozważania. **W związku z powyższym, wnioskuje o przyjęcie rozprawy doktorskiej i dopuszczenie mgra Adama Śpiewaka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**