Zadania z matematyki na egzamin wstępny na studia II stopnia

Wydział MIiM UW

ostatnie poprawki: 19 maja 2010

Spis treści

Wstęp

Egzamin trwa co najmniej 210 minut i składa się z siedmiu zadań *wybranych z poniższego zestawu*: trzech z części pierwszej, dwóch z części drugiej, jednego z części trzeciej i jednego z części czwartej. Zadania wybierane są tak, aby tematyka objętego nimi materiału była możliwie najszersza. Podczas egzaminu nie wolno posługiwać się telefonami komórkowymi, kalkulatorami, laptopami, palmtopami itp. Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić.

Rozwiązania każdego zadania punktowane są w skali 0–10. Wynik każdego zdającego jest sumą zdobytych przezeń punktów. Nie są wystawiane oceny w tradycyjnej skali, a na życzenie kandydata wydaje się *tylko* zaświadczenia o liczbie zdobytych punktów. Ranking kandydatów tworzony jest w kolejności uzyskanych wyników.

1 Analiza Matematyczna i Równania Różniczkowe

1. Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest ciągła w żadnym punkcie swojej dziedziny, oraz przykład takiej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest ciągła w dokładnie jednym punkcie swojej dziedziny.

2. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wielomianem nieparzystego stopnia, to dla każdej liczby $y \in \mathbb{R}$ istnieje taka liczba $x \in \mathbb{R}$, że $f(x) = y$. Wykazać, że nie jest to prawdą dla żadnego wielomianu stopnia parzystego.

3. Podać przykład takiej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdej liczby $\delta > 0$ zachodzi inkluzja $f\big([-\delta, \delta]\big) \supseteq [-1, 1]$.

4. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} |yx^{-2}| \cdot \mathrm{e}^{-|yx^{-2}|}, & \text{dla } x \neq 0\,; \\ 0 & \text{dla } x = 0\,. \end{cases}$$

5. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ma asymptotę w $+\infty$, czyli gdy istnieją takie liczby $a, b \in \mathbb{R}$, że $\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$, to f jest jednostajnie ciągła.

6. Znaleźć pochodną funkcji $f(x) = (2 + \sin x)^x$, $x \in \mathbb{R}$.

7. Podać przykład funkcji ciągłej w $(a,\, b)$ i nieróżniczkowalnej w ustalonych punktach $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, $n \geq 1$, ale różniczkowalnej w każdym przedziale $(a,\, x_1)$, $(x_n,\, b)$, $(x_i,\, x_{i+1})$, $i = 1,\, \ldots,\, n-1$.

8. Sformułować i udowodnić twierdzenie Rolle'a. Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna, ściśle rosnąca i spełnia warunek: $f'(a) = 0$ dla nieskończenie wielu $a \in \mathbb{R}$.

9. Dowieść, że $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$ dla $x > -1$.

10. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, zaś $a < b$ liczbami rzeczywistymi. Udowodnić, że jeśli $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem $g(x) = \int_a^b f(x+t)\, dt$, to funkcja g jest różniczkowalna i równość $g'(x) = f(x+b) - f(x+a)$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x.

11. Niech $f(x) = \frac{1}{5}|x-12| + \frac{1}{3}\sqrt{x^2+25}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że f przyjmuje wartość najmniejszą i znaleźć tę wartość.

12. Znaleźć maksimum objętości stożka wpisanego w kulę o promieniu 1.

13. Znaleźć minimum objętości stożka opisanego na kuli o promieniu 1.

14. Niech

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0, \\ x^2 \cos\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Znaleźć $\varphi'(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.
Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że funkcja f jest pochodną pewnej funkcji różniczkowalnej na całej prostej $\mathbb{R}$, a funkcja g nie jest pochodną żadnej funkcji różniczkowalnej na całej prostej.

15. Niech $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. Znaleźć lokalne ekstrema i kresy funkcji f na przedziale $\big[-1, 4\big]$ oraz na przedziale $\big[-1, 5\big]$.

16. Niech $h(x,y) = ay(\mathrm{e}^x - 1) + x\sin x - \cos y$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Wykazać, że h ma ekstremum lokalne w punkcie $(0,0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

17. Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f danej wzorem $f(x,y) = x^4 - y^4 - 4xy^2 - 2x^2$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, a następnie wyjaśnić, w których z nich funkcja f ma lokalne ekstrema.

18. Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ 5x^2 + 5y^2 - z^2 = 0 \ \text{ i } \ x + 2y + 3z = 20\}$. Znaleźć kresy górny i dolny funkcji f zdefiniowanej wzorem $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ na zbiorze A.

19. Niech $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 - z^2 + 4 = 0\}$. Znaleźć w zbiorze H punkt, którego odległość od punktu $(2,4,0)$ jest najmniejsza.

20. Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ xy + yz + zx + 1 = 0\}$. Znaleźć kresy górny i dolny funkcji f zdefiniowanej wzorem $f(x,y,z) = 2x + 2y - 3z$ na zbiorze A.

21. Znaleźć najmniejszą i największą wartość iloczynu xyz przy założeniu, że $x + y + z = 10$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

22. Niech

$$A = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10}\colon \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 10} x_i x_j = 45, \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_{10} \geq 0\Big\}$$

i niech $f(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}$. Znaleźć kres górny i kres dolny funkcji f na zbiorze A; wskazać, który z nich jest osiągany.

23. Wykazać, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{13} q^n$, gdzie $q \in \mathbb{R}$, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $q \in (-1, 1)$.

24. Zdefiniować pojęcia szeregu zbieżnego i szeregu zbieżnego bezwzględnie. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$$

jest zbieżny, a dla jakich jest zbieżny bezwzględnie?

25. Wykazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos(\pi n)$$

jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie.

26. Wykazać, że szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$.

27. Udowodnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1\,.$$

28. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} (\sqrt[n]{3} - 1), \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha < 0$.

29. Sformułować warunek Cauchy'ego zbieżności szeregu. Dane są trzy szeregi liczb rzeczywistych $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, przy czym $a_n < b_n < c_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wiadomo, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ są zbieżne. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ też jest zbieżny.

30. Dane są dwa szeregi zbieżne liczb rzeczywistych $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C$, przy czym $a_n < c_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Niech $B \in (A, C)$; skonstruować taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, że $a_n < b_n < c_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$.

31. Rozwinąć funkcję $f(x) = \ln(1-x)$ w szereg potęgowy o środku w zerze. Wykazać, że otrzymany szereg jest zbieżny jednostajnie na przedziale $(-1, 0)$, ale nie jest zbieżny jednostajnie na przedziale $(0, 1)$.

32. Podać przykład funkcji różniczkowalnej $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dla której $f(\mathbb{R}^2)$ jest torusem.

33. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni M w punkcie $p \in M$, jeśli

(a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6\}$, $p = (1, 1, 1) \in M$.

(b) M ma parametryzację

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \qquad u > 0,\ v \in \mathbb{R},$$

zaś $p = (2, 0, 2\pi) \in M$.

34. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} \sqrt[n]{x} \sin x \, dx.$$

35. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}}\,dx.$$

36. Wykazać, że
$$\iint_{(0,\,1)\times(0,\,1)}\frac{dx\,dy}{1-xy}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,.$$

37. Zbadać, czy funkcja $f(x,y)=\left(\frac{1}{1-xy}\right)^2$ jest całkowalna na kwadracie $(0,\,1)\times(0,\,1)$.

38. Wykazać, że
$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{n+1}}\,dx=0\,.$$

39. Podać przykład funkcji ciągłej na przedziale $[a,\,b]$, która jest nieróżniczkowalna tylko w jednym punkcie przedziału (a,b) i nie spełnia tezy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

40. Niech $f(x)=x+2\sin\bigl(\ln(1/x)\bigr)$ dla $x\geq 1$. Wykazać, że $|f(x)-f(y)|\leq 3|x-y|$ dla wszystkich $x,y\geq 1$.

41. Funkcja ciągła $f\colon[0,\,1]\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna na $(0,\,1]$, przy czym istnieje skończona granica $\lim_{x\to0^+}f'(x)$. Wykazać, że f ma pochodną prawostronną w zerze.

42. Wykazać, że funkcje $f(x)=\ln(1+x)$ i $g(x)=2x/(2+x)$ spełniają nierówność
$$f(x)>g(x)\qquad\text{dla } x>0.$$

43. Wykazać, że $1+x\ln\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\bigr)\geq\sqrt{1+x^2}$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$.

44. Udowodnić, że odwzorowanie $\Phi:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\Phi(x)=\ln(x+2)$, ma dokładnie jeden punkt stały $\alpha>0$. Wykazać, że dla dowolnego $x_0\geq 0$ ciąg zadany wzorem rekurencyjnym $x_{n+1}=\ln(x_n+2)$ jest zbieżny do α.

45. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a i b, takich, że $a+b=1$, zachodzą nierówności $a^3+b^3\geq\frac{1}{4}$, $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$.

46. Korzystając z wklęsłości odpowiedniej funkcji udowodnić nierówność Younga
$$xy\leq\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\qquad\text{dla}\quad x,\,y,\,p,\,q>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Następnie udowodnić nierówność Höldera:
$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{1/q}\qquad\text{dla}\quad x_i,\,y_i,\,p,\,q>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

47. Udowodnić, że jeśli $0<p\leq 1$, to dla dowolnych $x,\,y\in\mathbb{R}$ zachodzi
$$|x|^p+|y|^p\geq|x+y|^p\ .$$

48. Wykazać, że ciąg
$$a_n:=\frac{n}{1^2+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2},\qquad n=1,2,\ldots$$
ma granicę równą $\pi/4$.

Wskazówka. Ciąg a_n jest ciągiem sum całkowych pewnej funkcji $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$.

49. Wykazać, że ciąg

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+n}} + \frac{1}{\sqrt{2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ma granicę równą $2\sqrt{2} - 2$.

Wskazówka. Ciąg a_n jest ciągiem sum całkowych pewnej funkcji $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

50. Wykazać, że ciąg

$$a_n := \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ma granicę równą $4\mathrm{e}^{-1}$.

Wskazówka. Ciąg $\log a_n$ jest ciągiem sum całkowych pewnej funkcji $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

51. Znaleźć dwa trójkąty równoboczne o sumie pól równej 2, których suma obwodów jest maksymalna.

52. Znaleźć punkty przegięcia krzywych $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ i $y = x\mathrm{e}^{-x^2}$.

53. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \sin t \, dt.$$

54. Udowodnić, że $\int_0^1 x^n \sin x \, dx < \frac{1}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

55. Wartość całki $I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$ przybliżono, korzystając z prostej kwadratury trapezów, liczbą $T = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-1})$. Wykazać, że błąd bezwzględny $|I - T|$ tego przybliżenia spełnia nierówność $|I - T| \le \frac{1}{6}$.

56. Wyznaczyć taką trójkę liczb rzeczywistych a, b, c, żeby dla dowolnego wielomianu w stopnia nie większego niż 2 spełniona była zależność

$$\int_0^1 w(x)\, x^2 \, dx = aw(0) + bw(1/2) + cw(1).$$

57. Dla rzeczywistych x i y obliczamy $a = x^2 - y^2$ oraz $b = 2xy$, stosując algorytm:

$$\mathtt{p} := \mathtt{x} - \mathtt{y}; \quad \mathtt{q} := \mathtt{x} + \mathtt{y}; \quad \mathtt{a} = \mathtt{p} * \mathtt{q}; \quad \mathtt{b} = 2 * (\mathtt{x} * \mathtt{y});$$

Uzasadnić, że ten algorytm jest numerycznie stabilny.

58. Funkcja $f\colon [a, b] \to (0, +\infty)$ jest ciągła. Określamy nową funkcję $\psi\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = \int_a^b (x - t)^2 f(x)\, dx$. Wykazać, że funkcja ψ osiąga na (a, b) swoje minimum. W jakim punkcie? Scharakteryzować ten punkt w terminach wyjściowej funkcji f.

59. Obliczyć długość jednej fali cykloidy $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

60. Obliczyć długość asteroidy $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$, gdzie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

61. Wykazać, że długość elipsy $x^2 + 2y^2 = 2$ jest równa długości jednej pełnej fali wykresu sinusoidy $x \mapsto \sin x$, $0 \le x \le 2\pi$.

62. Obliczyć długość wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{1}{3}\big(x^2 + 2\big)^{3/2}, \quad x \in [0,\, 1].$$

63. Dla jakich $\alpha > 0$ funkcja $f(x) = \big(\frac{1}{\sin x}\big)^{\alpha}$ jest całkowalna na przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$?

64. Dowieść zbieżności całki niewłaściwej $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$.

65. Dowieść zbieżności całki niewłaściwej $\int_1^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{x}\,dx$.

66. Czy istnieje skończona całka niewłaściwa $\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,dx$?

67. Czy funkcja $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ jest całkowalna na $(0,\,1)$?

68. Obliczyć objętość elipsoidy powstałej przez obrót elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\,, \qquad z = 0,$$

wokół osi $\overrightarrow{Ox}$.

69. Obliczyć pole figury płaskiej ograniczonej przez pętlę krzywej $y^2 = x^2 + x^3$.
Wskazówka. Podstawienie $y = tx$ pozwala znaleźć parametryzację całej krzywej parametrem t.

70. Obliczyć pole figury w $\mathbb{R}^2$ zawartej między osią $\overrightarrow{Ox}$ i jedną pełną falą cykloidy $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

71. Wykazać, że funkcja $f(x,y) = \frac{1}{\cos x \cos y}$ nie jest całkowalna na kwadracie $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

72. Wykazać, że funkcja $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ jest całkowalna na kwadracie $(0,\,1) \times (0,\,1)$ i obliczyć jej całkę po tym kwadracie.

73. Wykazać, że funkcja $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ nie jest całkowalna na kwadracie $(0,\,1) \times (0,\,1)$.

74. Podać przykład dyfeomorfizmu klasy C^1, który przeprowadza zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < x^2 + y^2 < 2,\ x < y < 2x\}$ na kwadrat $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| < 1, |y| < 1\}$.

75. Podać przykład dyfeomorfizmu klasy C^1, który przeprowadza zbiór $\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ na zbiór $\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 > 1\}$.

76. Wykazać, że funkcja

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

jest całkowalna na $\mathbb{R}^2$, a jej całka po $\mathbb{R}^2$ jest równa 0.

77. Obliczyć pole figury płaskiej ograniczonej przez lemniskatę Bernoulliego $\big(x^2+y^2\big)^2 = x^2 - y^2$.

78. Krzywa zwana kardioidą ma opis parametryczny $x(t) = 2\cos t - \cos 2t$, $y(t) = 2\sin t - \sin 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Obliczyć długość kardioidy.

79. Krzywa zwana kardioidą ma opis parametryczny $x(t) = 2\cos t - \cos 2t$, $y(t) = 2\sin t - \sin 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Obliczyć pole obszaru w $\mathbb{R}^2$ ograniczonego tą krzywą.

80. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[x]{1 - 3x}\,.$$

81. Sformułować twierdzenie o różniczkowaniu szeregów potęgowych. Wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \qquad \text{dla wszystkich } x \in (-1, 1).$$

82. Niech $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ dla $x > 1$. Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f oraz jej kres dolny i górny. Zbadać, na jakich przedziałach f jest wypukła, a na jakich wklęsła. Naszkicować wykres tej funkcji.

83. Znaleźć rozwinięcie Taylora w punkcie $x = 1$ — do wyrazów drugiego rzędu, z resztą w postaci Lagrange'a — funkcji $f(x) = \sin(\pi/x)$, $x \neq 0$.

84. Znaleźć wszystkie lokalne minima i maksima funkcji $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadanej wzorem

$$f(x,y) = (1 + \mathrm{e}^y)\cos x + y\mathrm{e}^y\,.$$

85. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni opisanej równaniem

$$x^2 + 2y^2 - z^3 + xyz - 2 = 0$$

w punkcie $(2, 1, 2)$.

86. Znaleźć kres dolny i górny funkcji $f(x,y,z) = xyz$ na sferze jednostkowej $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

87. Znaleźć kres górny i dolny funkcji $f(x,y) = x^3 + y^3$ na zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

88. Korzystając z twierdzenia Fubiniego obliczyć $\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx\right)^2$. Następnie, używając otrzymanego wyniku, znaleźć wartość funkcji Γ Eulera,

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

w punkcie $s = \frac{1}{2}$.

89. Zbadać, czy funkcja $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,\,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,\,0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna w punkcie $(0,\,0)$.

90. Wykazać, że funkcja $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x,y) = |\mathrm{e}^x - y|(\mathrm{e}^x - 1)$ jest różniczkowalna w punkcie $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{e}^a \neq b$ lub $a = 0, b = 1$.

91. Wykazać, że jeśli ciąg liczb rzeczywistych a_n jest zbieżny do skończonej granicy a, to

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

Podać przykład, który świadczy, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

92. Sformułować nierówności między średnimi: arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n$. Udowodnić, że dla każdych liczb naturalnych k i m zachodzi nierówność

$$\sqrt[k+m]{k^m \cdot m^k} \leq \frac{k+m}{2}\,.$$

93. Sformułować nierówności między średnimi: arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n$. Udowodnić, że dla każdych liczb naturalnych k i m zachodzi nierówność

$$\sqrt[k+m]{k^k \cdot m^m} \geq \frac{k+m}{2}\,.$$

Uwaga: Wszystkie rozwiązania równań różniczkowych w zadaniach 94–112 rozważane są na maksymalnym przedziale, na którym można je określić.

94. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt[3]{x}$ spełniające warunek $x(0) = 0$.

95. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $\dfrac{dx}{dt} = |x|$.

96. Duży garnek świeżo ugotowanej zupy o temperaturze 100° C chłodzony jest w bieżącej wodzie o temperaturze 5° C; zupa jest mieszana, więc można przyjąć, że jej temperatura jest taka sama we wszystkich punktach garnka. W ciągu 10 minut temperatura zupy obniżona została do 60° C. Zakładając, że obowiązuje prawo stygnięcia Newtona (*szybkość zmniejszania się temperatury układu jest proporcjonalna do różnicy temperatur między układem a otoczeniem*), obliczyć, w jakim czasie garnek ostygnie do temperatury 20° C.

97. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunek Lipschitza, to rozwiązania równania $\frac{dx}{dt} = f(x)$ są określone dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

98. Rozwiązać równanie $x' + 2tx = \mathrm{e}^{-t^2} \sin t$.

99. Rozwiązać równanie $tx' = 1 + x^2$.

100. Rozwiązać równanie $tx' = x(\ln x - \ln t)$.

101. Rozwiązać równanie $x' = \frac{x+2t-6}{2x+t}$.

102. Niech A będzie funkcją ciągłą określoną na przedziale (a, b), $a < b$, której wartościami są macierze wymiaru $n \times n$. Udowodnić, że zbiór rozwiązań układu równań $x' = A(t)x$ jest przestrzenią liniową. Znaleźć jej wymiar.

103. Obliczyć $\exp(tA)$, jeśli

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

104. Macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ma dokładnie dwie różne wartości własne, obie nierzeczywiste, jej wyznacznik jest równy 25. Rozwiązać układ równań liniowych jednorodnych $x' = Ax$.

105. Rozwiązać układ równań liniowych jednorodnych $x' = Ax$, jeśli

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

wiedząc, że jedną z wartości własnych macierzy A jest liczba 3, dwie następne nie są rzeczywiste, a wyznacznik A jest równy 30.

106. Udowodnić, że dziedzina każdego rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & x(x^2 + xy + 1), \\ \dfrac{dy}{dt} & = & y(y^2 + xy + 1). \end{cases}$$

zawiera półprostą $(-\infty, 0]$ oraz że każde rozwiązanie tego układu spełnia warunek

$$\lim_{t\to-\infty} \left(x(t)^2 + y(t)^2\right) = 0.$$

107. A jest macierzą wymiaru $n \times n$, której wszystkie wartości własne mają ujemne części rzeczywiste. Funkcja $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jest dowolnym rozwiązaniem układu: $x'(t) = Ax(t)$. Udowodnić, że $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

108. A jest macierzą wymiaru $n \times n$. Część rzeczywista jednej z jej wartości własnych jest dodatnia. Udowodnić, że dla dowolnej liczby $\delta > 0$ istnieje taka funkcja $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, że: $x'(t) = Ax(t)$ oraz $\|x(0)\| < \delta$ i nie jest prawdą, że $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

109. Niech $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2. Rozważamy układ równań $x' = \frac{\partial H}{\partial y}$, $y' = -\frac{\partial H}{\partial x}$. Załóżmy, że $\operatorname{grad} H(0) = 0$. Udowodnić, że dla dowolnej liczby $\delta > 0$ istnieje takie rozwiązanie $\big(x(t), y(t)\big)$, że $|x(0)|, |y(0)| < \delta$ i nie jest prawdą, że $\lim_{t\to\infty} \big(x(t)^2 + y(t)^2\big) = 0$.

110. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x^{(5)} + 2x^{(4)} + 2x^{(3)} + 4x'' + x' + 2x = 100\mathrm{e}^{-2t}.$$

111. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 10\mathrm{e}^{t} + 10\mathrm{e}^{-t} + 10\sin t.$$

112. Znaleźć taką funkcję x zmiennej t, że $x'(t)\cos t - 2x\sin t = 1$ dla $t \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ i $x(0) = 1$.

2 Geometria z Algebrą Liniową i Algebra

113. Czy istnieją ciała charakterystyki 4? Ile rozwiązań ma równanie $x^4 = 1$ w ciele charakterystyki 2?

114. Znaleźć wszystkie pierwiastki wielomianu $x^6 - 2$ w ciałach $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

115. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$, oraz $v_1, v_2, v_3 \in V$. Wykazać, że zbiory wektorów $\{v_1 + 2v_2, v_1 + v_2 - v_3, 5x_3\}$ i $\{v_1, 4v_2, 6v_3\}$ rozpinają tę samą podprzestrzeń liniową.

116. Wykazać, że jeśli zbiór $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ jest bazą pewnej przestrzeni liniowej V, to zbiór $\{v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + v_2 + \ldots + v_n\}$ również jest bazą tej przestrzeni.

117. Sprawdzić, które z poniższych podzbiorów przestrzeni liniowej wszystkich funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ są jej podprzestrzeniami liniowymi:
a) zbiór wszystkich funkcji przyjmujących w punkcie 0 wartość 7,
b) zbiór wszystkich funkcji mających co najwyżej skończenie wiele punktów nieciągłości,
c) zbiór wszystkich funkcji przyjmujących wartość 0 poza zbiorem skończonym (zależnym od funkcji).

118. Niech W będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V nad ciałem K i $v \in V \setminus W$. Wykazać, że jeżeli $\dim\big(\operatorname{lin}\{W \cup \{v\}\}\big) = \dim W$, to wymiar przestrzeni V jest nieskończony.

119. Znaleźć bazę podprzestrzeni $\operatorname{lin}\{(1,2,3), (1,2,1), (1,2,2), (2,4,6)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

120. Znaleźć macierze odwrotne (o ile istnieją) macierzy: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

121. Obliczyć wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

122. Załóżmy, że przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ma w pewnych bazach macierz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
Wykazać, że nie istnieją takie bazy w $\mathbb{R}^3$, w których f miałoby macierz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

123. Niech przekształcenie liniowe $f\colon V \to V$ ma w bazie $\{v_1, v_2, v_3\}$ macierz A. Jaką macierz ma f w bazie $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3\}$?

124. Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wykazać, że jądro $\ker f$ i obraz $\operatorname{Im} f$ są podprzestrzeniami liniowymi oraz $\dim V = \dim\ker f + \dim \operatorname{Im} f$.

125. Wyznaczyć zbiór rozwiązań układu równań (nad ciałem $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -10 \\ 4x_1 + 12x_3 &= t \end{aligned}$$

w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

126. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że zbiór rozwiązań układu równań

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= c \\ ax_1 + cx_3 &= b \\ bx_2 + cx_3 &= a \end{aligned}$$

jest jednoelementowy. Wykazać, ze $abc \neq 0$ i znaleźć rozwiązanie powyższego układu.

127. Znaleźć macierz przekształcenia sprzężonego do $f(x, y) = (x - y, 2x)$ w bazie $(\mathbb{R}^2)^*$ sprzężonej do bazy $\{(1, 1), (1, 2)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

128. Wyznaczyć postać Jordana macierzy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

129. Podać definicję wielomianu charakterystycznego endomorfizmu f skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Uzasadnić, że definicja ta nie zależy od wyboru bazy w przestrzeni V.

130. Podać definicję śladu endomorfizmu f skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wykazać, że definicja ta nie zależy od wyboru bazy w przestrzeni V.

131. Niech f będzie niezerowym endomorfizmem przestrzeni liniowej V takim, że f^3 jest odwzorowaniem zerowym. Wykazać, że nie istnieje baza, w której f ma macierz diagonalną.

132. Sprawdzić, czy zbiory punktów $\{(1, 1, 0), (2, 1, 0), (3, 1, 1)\}$ i $\{(2, 1, 0), (3, 1, 0), (3, 1, 1)\}$ rozpinają w $\mathbb{R}^3$ tę samą podprzestrzeń afiniczną.

133. Podać wzór na obrót płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół punktu $(1, 1)$.

134. Forma dwuliniowa $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ma w bazie standardowej macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Obliczyć $\xi((1, 2, 0), (2, 0, 1))$.

135. Sprawdzić, czy forma dwuliniowa zadana w bazie standardowej macierzą

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zadaje na $\mathbb{R}^3$ pewien iloczyn skalarny.

136. Które spośród przekształceń liniowych zadanych w bazie standardowej macierzami

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

są izometriami przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym?

137. Znaleźć – w wybranej przez siebie bazie – macierz rzutu prostopadłego $\mathbb{R}^3$ (ze standardowym iloczynem skalarnym) na podprzestrzeń opisaną równaniem $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$. Podać wektory tej bazy.

138. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Wykazać, że jeśli przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zachowuje prostopadłość wektorów, to istnieje $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zachowujące iloczyn skalarny i takie, że $f = cg$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$.

139. Obliczyć objętość czworościanu, który ma wierzchołki w punktach $(1,1,1)$, $(2,1,1)$, $(2,2,1)$ i $(2,2,2)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

140. Obliczyć odległość punktu $(1,1,0)$ od płaszczyzny opisanej równaniem $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

141. Zastosować algorytm ortogonalizacji Grama–Schmidta do układu wektorów

$$(1,1,1), \quad (3,3,0), \quad (0,6,6)$$

przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

142. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnie rzeczywiste opisane równaniami: $5x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1 + 4x_3 + 8 = 0$ oraz $-x_1^2 + x_2^2 + (t+2)x_3^2 - 4x_2 + 2 = 0$ są równoważne afinicznie?

143. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach w punktach $(1,2,3)$, $(2,3,5)$, $(2,2,3)$.

144. Wykazać, że dowolna symetryczna macierz rzeczywista jest diagonalizowalna, a każde dwa wektory własne takiej macierzy odpowiadające jej różnym wartościom własnym są prostopadłe.

145. Niech V bedzie przestrzenią liniową wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej n. Dla jakich $w \in V$ zbiór $\{w, w', w'', \ldots, w^{(n)}\}$ jest bazą V?

146. Znaleźć wielomian f stopnia 4 o współczynnikach rzeczywistych, dla którego $f(2) = 5$, $f'(2) = 19$, $f''(2) = 40$, $f^{(3)}(2) = 48$, $f^{(4)}(2) = 24$.

147. Czy istnieje wielomian w stopnia 4 o współczynnikach rzeczywistych taki, że $w(0) = w(1) = w(2) = w(3) = w(4) = 1$, $w(5) = 5$?

148. Czy dla dowolnych dwóch parabol na płaszczyźnie istnieje podobieństwo, które przeprowadza jedną z nich na drugą?

149. Niech V będzie przestrzenią liniowa wielomianów jednej zmiennej stopnia co najwyżej n nad ciałem $\mathbb{R}$, zaś $\varphi : V \to V$ odwzorowaniem różniczkowania. Wykazać, że φ jest liniowe. Znaleźć bazę, w której φ ma macierz w postaci Jordana. Podać tę macierz.

150. Dany jest równoległobok o przekątnych $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$. Wpisano w niego romb o bokach równoległych do $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$. Wykazać, że długość boku tego rombu jest równa $\frac{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|}$.

151. Znaleźć wielomian w możliwie niskiego stopnia, który przyjmuje wartości:

$$w(0) = -1, \quad w(1) = 3, \quad w(2) = 5, \quad w(3) = -1, \quad w(4) = 0.$$

Obliczyć $w'(0)$.

152. Dla danego niezerowego $v \in \mathbb{R}^4$ określamy macierz $H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T$, gdzie I jest macierzą identycznościową. Wykazać, że $H = H^T = H^{-1}$. Wskazać taki wektor v, żeby przekształcenie, które w standardowej bazie $\mathbb{R}^4$ ma macierz H, przeprowadzało wektor $(1, -1, -1, 1)^T$ na pewien wektor równoległy do wektora $(1, 0, 0, 0)^T$.

153. Znaleźć wszystkie wektory i wartości własne macierzy

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wykazać, że ciąg zadany wzorem rekurencyjnym $x_{n+1} = A x_n$, gdzie $x_0 = (3, -1)^T$, jest zbieżny do wektora $(2, 1)^T$.

154. Niech $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$f(\lambda) = \|Ax - \lambda x\|_2 ,$$

gdzie x jest niezerowym wektorem w $\mathbb{R}^n$, natomiast A jest kwadratową macierzą rzeczywistą wymiaru n. Wykazać, że minimum f jest osiągane dla $\lambda = \frac{x^T A x}{x^T x}$.

155. Wykazać, że każda grupa skończona jest izomorficzna z podgrupą pewnej grupy permutacji.

156. Niech p będzie liczbę pierwszą. Wykazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}$ jest $x^p \equiv_p x$.

157. Niech G będzie skończoną grupą cykliczną. Wykazać, że jeżeli n dzieli $|G|$, to w G istnieje element rzędu n. Ile jest takich elementów?

158. Podać przykład grupy skończonej G i liczby naturalnej n takiej, że n dzieli $|G|$, ale w G nie ma elementu rzędu n.

159. Wykazać, że jeżeli grupa G zawiera dokładnie jeden element rzędu n, to $n = 1$ lub $n = 2$.

160. Wykazać, że każda grupa, której rząd jest liczbą pierwszą jest cykliczna. Opisać, z dokładnością do izomorfizmu, wszystkie obrazy homomorficzne grupy cyklicznej rzędu 36.

161. Wykazać, że jeżeli $a^n = e$, gdzie e oznacza element neutralny w grupie G, to rząd a dzieli n. Obliczyć ilość elementów rzędu 6 w grupie $S_3 \times \mathbb{C}_2$, gdzie S_3 oznacza grupę permutacji zbioru 3–elementowego, zaś $\mathbb{C}_2$ oznacza 2–elementową grupę cykliczną.

162. Niech G będzie grupą. Wykazać, że odwzorowanie $f \colon G \to G \times G$ dane wzorem $f(a) = (a^2, a)$ jest homomorfizmem grup wtedy i tylko wtedy gdy G jest grupą abelową.

163. Wykazać, że grupa $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/H$, gdzie $H = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2a + 6b = 0\}$, jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

164. Czy istnieje działanie grupy 12-elementowej na zbiorze liczb całkowitych mające co najmniej jedną orbitę 5–elementową?

165. Wykazać, że zbiór wszystkich automorfizmów wewnętrznych grupy G tworzy podgrupę normalną w grupie wszystkich automorfizmów grupy G.

166. Wykazać, że każda grupa rzędu 4 jest abelowa.

Uwaga: W zadaniach 167–173 słowo *pierścień* oznacza zawsze *pierścień przemienny z* 1.

167. Wykazać, że w pierścieniu skończonym R każdy element, który nie jest dzielnikiem zera, jest odwracalny. Wskazać przykład pierścienia i elementu nie będącego dzielnikiem zera, który nie jest odwracalny.

168. Znaleźć największy wspólny dzielnik wielomianów $x^6 + x + 1, x^2 + x + 1$ w pierścieniu $\mathbb{Z}_2[x]$.

169. Zbadać nierozkładalność wielomianu $2x^5 + 4x^4 + 12x + 4$ w każdym z pierścieni $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$.

170. Wykazać, że $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ nie jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

171. Niech R będzie dziedziną. Dla elementów $a, b \in R$ zdefiniować ich największy wspólny dzielnik $NWD(a, b)$. Wykazać, że jeżeli R jest dziedziną ideałów głównych, to zachodzi wzór $NWD(a, b)R = aR + bR$, gdzie cR oznacza ideał generowany przez element $c \in R$.

172. Wykazać, że pierścień $\mathbb{R}[x]/((x + 1)x)$ zawiera niezerowe dzielniki zera, ale nie zawiera niezerowych elementów nilpotentnych.

173. Wykazać, że jeżeli $f\colon R \to T$ jest homomorfizmem pierścieni i I jest ideałem w T, to przeciwobraz $f^{-1}(I)$ jest ideałem w R. Niech J będzie ideałem w R. Czy $f(J)$ musi być ideałem w T?

3 Topologia z elementami Teorii Mnogości

174. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Średnicą zbioru $A \subset X$ nazywamy liczbę $\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. Wykazać, że $\delta(A) = \delta(\overline{A})$ dla dowolnego $A \subset X$.

175. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wykazać, że dla $a \in X$ funkcja $f_a : X \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f_a(x) = d(a, x)$ jest ciągła.

176. Na zbiorze $C([0, 1])$ funkcji ciągłych z przedziału $[0, 1]$ w $\mathbb{R}$ określamy metryki

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt, \qquad d_2(f, g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|.$$

Niech τ_i będzie topologią w $C([0, 1])$ generowaną przez d_i, $i = 1, 2$. Wykazać, że $\tau_1 \subset \tau_2$ i $\tau_1 \neq \tau_2$.

177. Niech $L \subset C([0, 1])$ będzie podzbiorem funkcji postaci $f_a(t) = at$, $a \in \mathbb{R}$. Wykazać, że metryki d_1 i d_2 określone w poprzednim zadaniu generują na zbiorze L takie same topologie.

178. Podać przykład przestrzeni metrycznej, której topologia nie ma przeliczalnej bazy.

179. Podać przykład przestrzeni metrycznej, która nie jest homeomorficzna z żadną podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

180. Wykazać, że dla każdego podzbioru A przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ zbiór $a \in A$ takich, że $a \notin \overline{A \setminus \{a\}}$ jest przeliczalny.

181. Określić ciągłą bijekcję z przedziału $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ na okrąg $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Wykazać, że nie istnieje ciągła bijekcja z S^1 na $(0, 1]$.

182. Niech $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ będą przekształceniami ciągłymi określonymi na zwartej przestrzeni X i niech I_x oznacza odcinek w $\mathbb{R}^3$ łączący punkt $(\cos(f(x)), \sin(f(x)), 0)$ z punktem $(0, 0, g(x))$ (wraz z końcami). Wykazać, że $Z = \bigcup_{x\in X} I_x$ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^3$.

183. Wykazać, że podzbiór A przestrzeniu euklidesowej $\mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy każda funkcja ciągła $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest ograniczona.

184. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ takim, że $\mathbb{R}^n \setminus A$ jest nieograniczony. Wykazać, że A jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $d(A, B) > 0$ dla każdego domkniętego zbioru B rozłącznego z A (gdzie $d(A, B) = \inf\{d(a, b)\colon\ a \in A, b \in B\}$, a d jest metryką euklidesową na przestrzeni $\mathbb{R}^n$).

185. Niech $Z_0 = \mathbb{N}$, $Z_1 = \{0\} \cup \{\frac{1}{i}\colon\ i = 1, 2, \ldots\}$, $Z_2 = Z_1 \cup \mathbb{N}$. Wykazać, że żadne dwie spośród podprzestrzeni Z_0, Z_1, Z_2 prostej euklidesowej nie są homeomorficzne.

186. Niech $Z_0 = \mathbb{N}$, $Z_1 = \{0\} \cup \{\frac{1}{i}\colon\ i = 1, 2, \ldots\}$, $Z_2 = Z_1 \cup \mathbb{N}$. Wykazać, że podprzestrzenie $Z_0 \times Z_1$ i $Z_0 \times Z_2$ płaszczyzny euklidesowej są homeomorficzne.

187. Sformułować twierdzenie Baire'a. Wykazać, że każda niepusta i przeliczalna przestrzeń metryczna zupełna ma punkt izolowany.

188. Sformułować twierdzenie Banacha o punkcie stałym. Niech (X, d) będzie przestrzenią zupełną, a $T : X \to X$ funkcją taką, że $T(X) = X$. Wykazać, że jeśli T jest rozszerzające (tzn. istnieje $r > 1$ takie, że $d(T(x), T(y)) \geq rd(x, y)$ dla $x, y \in X$), to T ma dokładnie jeden punkt stały.

189. Dla $A \subset \mathbb{R}$, niech $X(A) \subset \mathbb{R}^2$ będzie sumą odcinków (z końcami) łączących punkt $(0, 1)$ płaszczyzny z punktami $(a, 0)$, $a \in A$. Wykazać, że zbiór $X(A)$ jest zupełny w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwarty.

190. Dla $A \subset \mathbb{R}$, niech $X(A) \subset \mathbb{R}^2$ będzie sumą odcinków (z końcami) łączących punkt $(0, 1)$ płaszczyzny z punktami $(a, 0)$, gdzie $a \in A$, i niech $X_-(A) = \{(x, y) \in R^2\colon\ (x, -y) \in X(A)\}$. Wykazać, że dla $A, B \subset \mathbb{R}$ podzbiór płaszczyzny euklidesowej $X(A, B) = X(A) \cup X_-(B)$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory A i B nie są rozgraniczone jako podzbiory prostej euklidesowej (tzn. $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \neq \emptyset$).

191. Wykazać, że przedział $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ nie jest homeomorficzny z okręgiem $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

192. Wykazać, że nie istnieje ciągła bijekcja z przedziału $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ na okrąg $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

193. Niech $Z_0 = \{\frac{1}{i}\colon\ i = 1, 2, \ldots\}$, $Z_1 = \{0\} \cup Z_0$ i niech $I_0 = (0, 1)$, $I_1 = [0, 1]$. Wykazać, że żadne dwie spośród podprzestrzeni $Z_0 \times I_0$, $Z_1 \times I_0$, $Z_0 \times I_1$, $Z_1 \times I_1$ płaszczyzny euklidesowej nie są homeomorficzne.

194. Wykazać, że jeśli $A \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem przeliczalnym, to $\mathbb{R}^2 \setminus A$ jest spójnym podzbiorem płaszczyzny euklidesowej.

195. Zdefiniować bijekcję $\varphi : A \to B$ zbioru $A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\colon\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ f(n) \leq f(n + 1)\}$ na zbiór $B = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\colon\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ f(n) < f(n + 1)\}$ (zakładamy, że $0 \in \mathbb{N}$).

196. Wykazać, że nie istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $r \in \mathbb{R}$ zbiór $f^{-1}(r)$ ma dokładnie dwa elementy. Wykazać, że istnieje funkcja nieciągła o tej własności.

197. Wykazać, że dla dowolnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zbiór punktów, w których f ma minimum lokalne właściwe, jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym (uwaga: przyjmujemy, że f ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ minimum lokalne właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $f(x) > f(x_0)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ spełniających warunek $0 < |x - x_0| < \varepsilon$).

198. Niech a_n oznacza liczbę ciągów długości n o wyrazach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ mających parzystą liczbę zer. Znaleźć definicję indukcyjną ciągu $(a_n)_{n\geq 1}$ i wykazać, że $a_n = \frac{1}{2}(4^n + 2^n)$.

Wskazówka. Zauważyć, że $4^n - a_n$ jest liczbą ciągów długości n mających nieparzystą liczbę zer.

199. Niech $A_n \subset X$ (gdzie $n = 1, 2, \ldots$) będą podzbiorami ustalonego zbioru X. Wykazać, że ciąg funkcji charakterystycznych $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ jest zbieżny punktowo do $\mathbb{1}_A$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n>m} A_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} A_n = A.$$

4 Rachunek Prawdopodobieństwa z elementami Statystyki

Uwaga: *Dystrybuantą* zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$, $t \in \mathbb{R}$.

200. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w nieograniczonym ciągu rzutów monetą wypadnie seria OOOROORR, przy założeniu, że orzeł wypada z prawdopodobieństwem $0 < p < 1$.

201. W urnie znajdują się dwie kule — jedna czarna i jedna biała. Wykonujemy następujący nieskończony ciąg losowań: wyciągamy z urny jedną kulę, oglądamy ją, wrzucamy z powrotem oraz dokładamy do urny jedną kulę białą. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że nieskończenie wiele razy wyciągniemy czarną kulę.

202. Trzech myśliwych, z których każdy trafia do celu z prawdopodobieństwem 0,8, strzeliło do dzika. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dzik został trafiony? Jeżeli wiadomo, że dzik został trafiony, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że trafiło go co najmniej dwóch myśliwych?

203. W szufladzie znajduje się 100 monet — 90 symetrycznych, na których orzeł i reszka wypadają z równym prawdopodobieństwem oraz 10 monet asymetrycznych, na których orzeł wypada trzy razy częściej niż reszka. Z pudełka wylosowano monetę i rzucono nią 3 razy, uzyskując za każdym razem orła. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wylosowana moneta jest niesymetryczna.

204. Urna zawiera pięć kul: białą, czarną, czerwoną, niebieską i zieloną. Losujemy 20 razy kulę, za każdym razem zwracając ją do urny.
a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że każda kula zostanie wylosowana przynajmniej raz?
b) Jaka jest wartość oczekiwana liczby różnych kolorów, które otrzymamy?

205. Nauczyciel na każdej lekcji wybiera losowo do odpowiedzi dwóch uczniów i jedną uczennicę. Wiedząc, że w klasie, do której chodzą Jacek i Agatka uczy się 18 chłopców i 8 dziewczynek znaleźć
a) prawdopodobieństwo tego, że zarówno Jacek jak i Agatka będą odpowiadać przynajmniej raz w czasie 5 pierwszych lekcji;
b) wartość oczekiwaną liczby dzieci wybranych do odpowiedzi w czasie 5 pierwszych lekcji.

206. Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ \frac{1}{7} & \text{dla } 0 \leq t < \frac{1}{14}, \\ \frac{2}{7} + t & \text{dla } \frac{1}{14} \leq t < \frac{3}{7}, \\ 1 & \text{dla } t \geq \frac{3}{7}. \end{cases}$$

Obliczyć $\mathbb{P}(0 < X < \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(X = 0)$ oraz $\mathbb{E}X$.

207. (a) Dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja

$$F(t) = \begin{cases} b - \frac{a}{(t+1)^2} & \text{dla } t \geq -\frac{1}{2}, \\ 0 & \text{dla } t < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej?
(b) Niech X będzie zmienną losową o dystrybuancie F postaci takiej jak w części (a) z $a = \frac{1}{4}$ i $b = 1$. Znaleźć dystrybuantę zmiennej losowej $Y = \frac{2}{(X+1)^2}$. Wykazać, że zmienna Y ma gęstość i ją obliczyć.

208. Zmienna losowa X ma ciągłą dystrybuantę F. Wykazać, że zmienna losowa $F(X)$ ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

209. Z odcinka o długości 2 losujemy na chybił trafił („prawdopodobieństwo geometryczne") i niezależnie dwa punkty X i Y. Znaleźć gęstość rozkładu odległości pomiędzy X i Y.

210. Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne, przy czym X i Y mają standardowy rozkład normalny, a Z rozkład dwupunktowy $\mathbb{P}(Z = 3) = \mathbb{P}(Z = -3) = \frac{1}{2}$. Wykazać, że zmienna $X + YZ$ ma rozkład normalny i zidentyfikować parametry tego rozkładu.

211. Zmienna losowa X ma gęstość $g(x) = ax^2 \mathbb{1}_{(-1,3)}(x)$. Znaleźć a oraz obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

212. Zmienne losowe X i Y są niezależne o wspólnym rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $2X - Y$.

213. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $2X^4 + 5$, gdy X ma rozkład normalny ze średnią 1 i wariancją 5.

214. Obliczyć $\mathbb{E}X^4$, gdy X ma rozkład normalny ze średnią a i wariancją σ^2.

215. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem 2. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej e^{3X}.

216. Rzucamy parą kostek, dopóki na którejś z kostek nie pojawi się szóstka. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję liczby wykonanych rzutów.

217. Zmienna losowe X i Y są takie, że $\mathbb{P}(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X = 2, Y = -1) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(X = 2, Y = 3) = \frac{1}{20}$.
a) Czy X i Y są niezależne?
b) Znaleźć $\mathbb{E}X$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{E}Y$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

218. Podać przykład nieskorelowanych zmiennych losowych, które nie są niezależne. Wykazać, że jeśli współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y jest równy 1, to istnieją liczby $a > 0$ i b takie, że $X = aY + b$ prawie na pewno.

219. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 3. Obliczyć
a) $\mathbb{P}(X + Y = 7)$;
b) $\mathbb{P}(XY \leq 1)$.

220. Zmienne losowe X i Y są niezależne. X ma rozkład wykładniczy z parametrem 2, a Y rozkład wykładniczy z parametrem 3. Obliczyć
a) $\mathbb{P}(X > Y)$;
b) $\mathbb{P}(X - Y > t | X > Y)$, dla $t \in \mathbb{R}$.

221. Niech (X, Y) będzie wektorem losowym z gęstością

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Znaleźć gęstości rozkładów X i Y. Obliczyć kowariancję X i Y.

222. Zmienne losowe X i Y są takie, że $\mathbb{E}X = 1$, $\mathrm{Var}(X) = 2$, $\mathbb{E}Y = 3$, $\mathrm{Var}(Y) = 2$, $\mathbb{E}XY = 5$. Czy te informacje pozwalają wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $X - Y$?

223. Rzucamy 3600 razy symetryczną kostką. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy co najmniej 700 szóstek? Wynik proszę wyrazić za pomocą dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

224. Losowania pewnej gry liczbowej odbywają się raz na tydzień, typuje je niezależnie od siebie 60000 osób. Dla każdego z grających prawdopodobieństwo wygrania w pojedynczym losowaniu jest równe $\frac{1}{30000}$.
a) Znaleźć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w ciągu trzech ustalonych tygodni będą łącznie co najmniej dwie wygrane;
b) Jeśli wiadomo, że w ciągu ustalonych czterech tygodni padło w sumie 10 wygranych, to jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym z tych tygodni były dokładnie 3 wygrane?

225. Zmienne losowe $X_1, X_2, ...$ sa niezależne i mają wspólny rozkład jednostajny na odcinku $(-1, 1)$. Wykazać, że $X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$ dąży do zera prawie na pewno.

226. Zmienne losowe $X_1, X_2, ...$ sa niezależne i mają wspólny rozkład taki, że $\mathbb{P}(X_n = 1) = 3/4, \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/4$. Wykazać, że $X_1 + ... + X_n$ zbiega do $+\infty$ prawie na pewno.

227. Zmienne losowe $X_1, X_2, ...$ sa niezależne i mają wspólny rozkład wykładniczy z parametrem 3. Wykazać, że ciąg zmiennych losowych

$$\frac{X_1 + ... + X_n + 3n}{X_1^2 + ... + X_n^2}$$

jest zbieżny prawie na pewno i wyznaczyć jego granicę.

228. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F, zaś $\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n}\#\{i \leq n \colon X_i \leq t\}$ oznacza dystrybuantę empiryczną. Obliczyć $\mathbb{E}\hat{F}_n(x)$, $\operatorname{Var}\hat{F}_n(x)$, $\operatorname{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y))$.

229. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F, zaś $\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n}\#\{i \leq n \colon \ X_i \leq t\}$ oznacza dystrybuantę empiryczną. Pokazać, że ciąg zmiennych losowych $\sqrt{n}(\hat{F}_n(x) - F(x))$ jest zbieżny do rozkładu normalnego. Zidentyfikować parametry tego rozkładu.

230. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką z rozkładu o dystrybuancie F, zaś $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ będą statystykami porządkowymi (pozycyjnymi). Wykazać, że zmienna losowa $X_{k:n}$ ma dystrybuantę

$$\mathbb{P}(X_{k:n} \leq x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} F(x)^i (1 - F(x))^{n-i}.$$

231. Mamy trzy skrzynie, każda napełniona towarem pochodzącym z jednej z trzech fabryk. Wiemy, ze pierwsza fabryka wypuszcza 6% wadliwych towarów, druga 10%, a trzecia 4%. Losowo wybieramy jedną ze skrzyń (z jednakowym prawdopodobieństwem 1/3), a następnie losowo wybieramy jedną sztukę towaru.
a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy produkt wadliwy?
b) Widzimy, że wybrana losowo sztuka towaru jest wadliwa. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pochodzi z pierwszej fabryki?
c) Widzimy, że wybrana losowo sztuka towaru jest wadliwa. Odkładamy ją do skrzyni i losujemy drugi raz, wciąż z tej samej skrzyni. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że za drugim razem wylosujemy produkt wadliwy?

232. Samoloty bombowe przedzierają się przez dwie linie obrony przeciwlotniczej. Każdy samolot, niezależnie od pozostałych, z prawdopodobieństwem θ może zostać strącony przez pierwszą linię obrony. Jeśli pokona pierwszą linię, z prawdopodobieństwem θ może zostać strącony przez drugą linię. Prawdopodobieństwo θ jest nieznane. Spośród $n = 100$ samolotów, $K_1 = 40$ zostało strąconych przez pierwszą linię, a dalszych $K_2 = 20$ zostało strąconych przez drugą linię.
a) Obliczyć wiarogodność dla zaobserwowanych wartości K_1 i K_2, czyli $\mathbb{P}_\theta(K_1 = 40, K_2 = 20)$.
b) Podać estymator największej wiarogodności parametru θ.

233. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką z rozkładu normalnego $N(0, \sigma^2)$ (o wartości oczekiwanej równej 0 i nieznanej wariancji).
a) Podać wzór na estymator $\hat{\sigma}$ największej wiarogodności parametru σ, czyli odchylenia standardowego.
b) Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję $\hat{\sigma}^2$.

234. Wykonujemy $n = 8$ doświadczeń zgodnie ze schematem Bernoulliego, z nieznanym prawdopodobieństwem θ sukcesu. Niech K będzie liczbą sukcesów. Rozważamy dwa estymatory:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{K}{n} = \frac{K}{8}; \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{K+1}{n+2} = \frac{K+1}{10}.$$

Niech $R_i(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_i - \theta)^2$, $i = 1, 2$ oznaczają funkcje ryzyka obu estymatorów. Wyznaczyć te funkcje.

235. Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_8$ jest próbką z nieznanego rozkładu prawdopodobieństwa z medianą m. Wiemy, że rozkład ma ciągłą dystrybuantę i m jest jedyną medianą. Niech $X_{1:8} \leq X_{2:8} \leq \cdots \leq X_{8:8}$ będą statystykami porządkowymi (pozycyjnymi). Przyjmijmy, że przedziałem ufności dla m jest $[X_{4:8}, X_{5:8}]$. Obliczyć poziom ufności, czyli $\mathbb{P}(X_{4:8} \leq m \leq X_{5:8})$.

236. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samy rozkładzie o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{120\theta^6}\, x^5 \mathrm{e}^{-x/\theta} & \text{dla } x > 0, \\ \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Wiadomo, że $\mathbb{E}_\theta X_i = 6\,\theta$ i $\mathrm{Var}_\theta\, X_i = 6\,\theta^2$.

Dobrać stałą c tak, aby statystyka $T = \frac{c}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ była estymatorem nieobciążonym parametru θ i obliczyć wariancję T.

237. Zważono 10 paczek białego sera i otrzymano następujące wyniki:

195; 198; 201; 191; 202; 194; 196; 198; 197; 198.

a) Znaleźć średnią i wariancję otrzymanej próbki.
b) Załóżmy, że jest to próbka losowa z rozkładu normalnego $\mathrm{N}(\mu, 9)$ z nieznanym parametrem μ i wariancją 9. Podać przedział ufności dla średniej masy paczki μ na poziomie ufności $1 - \alpha = 0.95$. W rozwiązaniu można przyjąć, że $\Phi^{-1}(0{,}95) \approx 1{,}645$ i $\Phi^{-1}(0{,}975) \approx 1{,}96$.

238. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Wykazać, że statystyki

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \bar{X})^2$$

są niezależne.

Wskazówka: Kombinacje liniowe niezależnych zmiennych normalnych są niezależne, jeśli są nieskorelowane.

239. W jeziorze jest nieznana liczba N ryb. W celu oszacowania N złowiono m ryb, oznakowano je i wpuszczono do jeziora. Po pewnym czasie złowiono ponownie n ryb i okazało się, że k z nich jest oznakowanych. Podać oszacowanie N uzyskane metodą największej wiarogodności.

240. Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie próbą z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta)$, $\theta > 0$. Niech

$$T = \frac{n+1}{n} \max\{X_1, \ldots, X_n\},$$

$$S = 2\bar{X}$$

będą estymatorami parametru θ. Czy są to estymatory nieobciążone? Który z nich ma mniejsza wariancję?

5 Przykłady rozwiązanych zadań

Poniżej zamieszczono kilka przykładowych zadań z dość szczegółowymi rozwiązaniami.

Zadanie. Wiedząc, że

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

znaleźć sumę szeregu

$$1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{29} - \frac{1}{31} - \frac{1}{35} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}}{3 + 6n - \cos(n\pi)}.$$

Rozwiązanie. Wyrazy drugiego szeregu są również wyrazami pierwszego, ale oprócz wyrazów drugiego szeregu w pierwszym pojawiają się dodatkowo $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{15}$, $\frac{1}{21}$, $-\frac{1}{27}$, ... Ich sumą jest

$$-\frac{1}{3}\big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\big) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}.$$

Możemy więc napisać

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{4} - \big(-\frac{\pi}{12}\big) \\
&= \Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{23} + \cdots\Big) \\
&\quad - \Big(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{21} - \frac{1}{27} + \cdots\Big) \\
&= \Big(\big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\big) + \big(-\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}\big) + \big(\frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17}\big) + \big(-\frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{23}\big) + \cdots\Big) \\
&\quad - \Big(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{21} - \frac{1}{27} + \cdots\Big) \\
&= \big(1 + \frac{1}{5}\big) + \big(-\frac{1}{7} - \frac{1}{11}\big) + \big(\frac{1}{13} + \frac{1}{17}\big) + \big(-\frac{1}{19} - \frac{1}{23}\big) + \cdots.
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy w zasadzie to, co mieliśmy obliczyć. Pozostaje tylko wyjaśnić, dlaczego wolno „otworzyć nawiasy". Niech $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{5}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, $s_4 = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}$, ... oznaczają kolejne sumy częściowe szeregu, który powstaje przez „otworzenie nawiasów" z szeregu zbieżnego $\big(1 + \frac{1}{5}\big) + \big(-\frac{1}{7} - \frac{1}{11}\big) + \big(\frac{1}{13} + \frac{1}{17}\big) + \big(-\frac{1}{19} - \frac{1}{23}\big) + \cdots$. Zbieżność tego szeregu oznacza, że ciąg $s_2, s_4, s_6, \ldots$ ma skończoną granicę (i już wiemy, że jest nią $\frac{\pi}{3}$). Ponieważ jednak $\lim\limits_{n\to\infty}\big(s_{2n-1} - s_{2n}\big) = 0$, więc ta granica jest również granicą ciągu $s_1, s_3, s_5, \ldots$. Wynika stąd, że ciąg $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$ jest zbieżny do granicy skończonej, a to oznacza zbieżność szeregu, o którym mowa w tezie zadania. Wykazaliśmy więc, że

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{29} - \frac{1}{31} - \frac{1}{35} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}}{3 + 6n - \cos(n\pi)}.$$

Zadanie. Załóżmy, że $a, b > 0$. Wykazać, że $(2-\sqrt{3})a^{2+\sqrt{3}} + (2+\sqrt{3})b^{2-\sqrt{3}} \geq 4\sqrt[4]{ab}$.

Rozwiązanie. Pochodna funkcji e^x jest ściśle rosnąca, więc funkcja ta jest ściśle wypukła. Ponadto, liczby $p = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ i $q = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = 1$ są dodatnie i spełniają warunek $p + q = 1 = 16pq$. Wobec tego, z nierówności Jensena (tzn. wprost z definicji funkcji wypukłej),

$$\begin{aligned}
\frac{2-\sqrt{3}}{4}a^{2+\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{3}}{4}b^{2-\sqrt{3}} &= p\mathrm{e}^{4q\ln a} + q\mathrm{e}^{4p\ln b} \\
&\geq \mathrm{e}^{4pq\ln a + 4pq\ln b} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\ln a + \frac{1}{4}\ln b} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\ln(ab)} = \sqrt[4]{ab}.
\end{aligned}$$

Uwaga. Oczywiście zamiast korzystać z wypukłości funkcji wykładniczej, można skorzystać z wklęsłości logarytmu. Po podzieleniu stronami przez 4 nierówności, którą należy udowodnić, można ją zlogarytmować, po czym zastosować definicję funkcji wklęsłej. Wygląda to tak: mamy wykazać, że $\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}a^{2+\sqrt{3}}+\frac{2+\sqrt{3}}{4}b^{2-\sqrt{3}}\right)\ge \ln\sqrt[4]{ab}=\frac{1}{4}(\ln a+\ln b)$; ponieważ pochodna funkcji ln jest ściśle malejąca, więc funkcja ln jest ściśle wklęsła, zatem

$$\begin{aligned}\ln\left(pa^{4q}+qb^{4p}\right) &\ge p\ln\left(a^{4q}\right)+q\ln\left(b^{4p}\right)\\ &= 4pq(\ln a+\ln b)=\frac{1}{4}(\ln a+\ln b)\,.\end{aligned}$$

Dodajmy jeszcze, że ponieważ funkcja wykładnicza jest ściśle wypukła, więc dla $a\ne b$ nierówność jest ostra.

Zadanie. Niech $f(x,y)=4x^2+y^2(1+2x)^3$ dla $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Wykazać, że jedynym punktem, w którym gradient tej funkcji jest wektorem zerowym, jest punkt $(0,0)\in\mathbb{R}^2$. Wyjaśnić, czy funkcja f ma lokalne ekstremum w punkcie $(0,0)$; określić, czy jest to minimum, czy maksimum.

Niech $Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad |x|\le 2\quad \text{i}\quad |y|\le 2\}$. Znaleźć kresy funkcji f w kwadracie Q.

Rozwiązanie. Mamy grad $f(x,y)=\big(8x+6y^2(1+2x)^2,2y(1+2x)^3\big)$. Z równości $2y(1+2x)^3=0$ wynika, że $x=-\frac{1}{2}$ lub $y=0$. W pierwszym przypadku otrzymujemy $8x=0$, czyli $x=0$, co przeczy temu, że $x=-\frac{1}{2}$. W drugim przypadku wnioskujemy, że $8x=0$, zatem jedynym punktem zerowania się gradientu funkcji f jest punkt $(0,0)$. Bez trudu stwierdzamy, że $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=8$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=2$. Macierzą drugiej różniczki f w punkcie $(0,0)$ jest więc

$$\begin{pmatrix}8&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

Z kryterium Sylvestera wynika natychmiast, że jest ona dodatnio określona, zatem w punkcie $(0,0)$ funkcja f ma lokalne minimum właściwe, co zresztą widać od razu, bo $f(x,y)=4x^2+y^2+$ *składniki wyższego stopnia* (por. dowód twierdzenia o lokalnych ekstremach).

Kwadrat Q jest oczywiście zbiorem zwartym, więc funkcja ciągła f osiąga na nim kresy. Wewnątrz może osiągać tylko kres dolny, bo w jedynym punkcie krytycznym funkcja ma lokalne minimum właściwe.

Zbadamy zachowanie f na brzegu Q. Mamy $f(x,2)=f(x,-2)=4\big(x^2+(1+2x)^3\big)$. Największą i najmniejszą wartość tej funkcji na przedziale $[-2,2]$ znajdujemy w standardowy sposób. Okazuje się, że najmniejsza wartość tej funkcji to $f(-2,2)=f(-2,-2)=4\cdot(-23)=-92$, a największa to $f(2,2)=f(2,-2)=4\cdot 129=516$. Podobnie, mamy $f(-2,y)=16-27y^2$. Na przedziale $[-2,2]$ najmniejsza wartość tej funkcji to $f(-2,-2)=f(-2,2)=16-27\cdot 4=4(4-27)=-92$, a największa to $f(-2,0)=16$. Dalej, $f(2,y)=16+125y^2$. Najmniejsza wartość tej funkcji to $f(2,0)=16$, a największa to $f(2,-2)=f(2,2)=16+4\cdot 125=516$.
Widać więc, że najmniejsza wartość funkcji f na kwadracie Q to -92, a największa to 516, natomiast w środku kwadratu funkcja ma lokalne minimum właściwe, $f(0,0)=0\in(-92,516)$.
Uwaga: funkcja jednej zmiennej $f(x,1)=4x^2+(1+2x)^3$ jest wielomianem trzeciego stopnia, więc jest nieograniczona zarówno z góry jak i z dołu; wynika stąd, że kres górny funkcji f w całej płaszczyźnie jest równy $+\infty$, a dolny — $-\infty$.

Zadanie. Niech

$$A=\begin{pmatrix}1&4&-1&0&2\\-1&5&-1&0&2\\0&0&3&0&0\\0&0&2&3&-3\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}.$$

Znaleźć rozwiązanie ogólne układu $\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$, wiedząc, że macierz A ma dokładnie jedną wartość własną.

Rozwiązanie. Ponieważ macierz A ma dokładnie jedną wartość własną, więc ta wartość jest równa $\frac{1}{5}(1+5+3+3+3)=3$, bo wartość własna musi w tej sytuacji być pięciokrotna, a suma wszystkich wartości własnych macierzy to jej ślad. (To, że 3 jest wartością własną macierzy A, widać też bez obliczania śladu: $\det(A-3I)=0$, bo macierz $A-3I$ ma przedostatnią kolumnę złożoną z samych zer, przy okazji $\mathbf{e}_4$ to jeden z wektorów własnych macierzy A.) Rząd macierz

$$A-3I=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

której jądro składa się z wektorów własnych macierzy A, jest równy 3, bo jądro składa się z tych wektorów (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5), dla których $2x_3-3x_5=0$, $-x_1+2x_2=0$ oraz $-x_3+2x_5=0$, czyli z takich (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5), dla których $x_3=x_5=0$ i $x_1=2x_2$, więc $\dim\ker(A-3I)=2$. Prosty (to nie żart) rachunek pokazuje, że

$$(A-3I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a stąd natychmiast wynika, że $(A-3I)^3=0$. Macierz A zapisana w postaci Jordana ma więc dwie klatki: jedną wymiaru 3, a drugą wymiaru 2. Mamy

$$\begin{aligned} (A-3I)\mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_4, \\ (A-3I)(-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_4) &= -2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+4\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

i wreszcie $(A-3I)(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)=\mathbf{0}$. Właśnie wykazaliśmy, że wektory $\mathbf{e}_3$, $-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_4$ i $2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ rozpinają trówymiarową przestrzeń niezmienniczą względem przekształcenia liniowego zdefiniowanego macierzą A. Do pełni szczęścia brakuje nam wektora spoza tej przestrzeni i spoza $\ker(A-3I)$, którego obraz jest w jądrze $A-3I$. Mamy $(A-3I)(2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_5)=\mathbf{e}_4$ oraz $(A-3I)\mathbf{e}_4=\mathbf{0}$. Możemy więc napisać rozwiązanie ogólne układu:

$$\mathbf{x}(t)=c_1\big[\mathbf{e}_3+t(-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_4)+\frac{1}{2}t^2(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\big]\mathrm{e}^{3t}+c_2\big[t(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)+(-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_4)\big]\mathrm{e}^{3t}+$$

$$+c_3\big[2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\big]\mathrm{e}^{3t}+c_4\big[(2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_5)+t\mathbf{e}_4\big]\mathrm{e}^{3t}+c_5\mathbf{e}_4\mathrm{e}^{3t}\,.$$

Przy okazji: stwierdziliśmy, że jedną z licznych baz Jordana dla przekształcenia liniowego zdefiniowanego macierzą A jest piątka wektorów $\mathbf{e}_3$, $-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_4$, $2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$, $2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_4$.

Zadanie. Prędkość wody wypływającej przez otwór w dnie naczynia jest równa $0{,}6\sqrt{2Gh}$, gdzie $G=10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, a h oznacza głębokość wody. Naczynie ma kształt walca o średnicy podstawy $2R=1{,}8$ m. Otwór w dnie ma średnicę $2r=6$ cm. Wysokość walca jest równa $H=2{,}45$ m. Po jakim czasie cała woda wycieknie z walca? Zakładamy, że w chwili początkowej walec jest wypełniony w całości wodą.

Rozwiązanie. Niech $h(t)$ oznacza głębokość wody w naczyniu w chwili t. W szczególności $h(0)=2{,}45$. W bardzo krótkim czasie Δt z naczynia wypłynie w przybliżeniu $0{,}6\sqrt{2Gh(t)}\cdot\Delta t\cdot\pi\cdot r^2$ wody; poziom wody obniży się wtedy o $h(t)-h(t+\Delta t)\approx\frac{0{,}6\sqrt{2Gh(t)}\cdot\Delta t\cdot\pi\cdot r^2}{\pi\cdot R^2}$. (Przybliżenie bierze się stąd, że prędkość wody w żadnym momencie nie jest stała). Po podzieleniu obu stron przez Δt, przejściu do granicy $\Delta t\to 0$ i podstawieniu wartości r,R otrzymujemy

$$-h'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t)-h(t+\Delta t)}{\Delta t}=0{,}6\sqrt{2G}\cdot\frac{r^2}{R^2}\cdot\sqrt{h(t)}=\frac{\sqrt{5}}{750}\cdot\sqrt{h(t)}\,.$$

Mamy więc $\frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = -\frac{\sqrt{5}}{750}$. Stąd $2\sqrt{h(t)} = -\int \frac{\sqrt{5}}{750}\,dt = -\frac{\sqrt{5}}{750}t + C$, więc $h(t) = \left(\frac{C}{2} - \frac{\sqrt{5}}{1500}t\right)^2$. Stąd wynika, że $2{,}45 = h(0) = \left(\frac{C}{2}\right)^2$, należy więc wziąć $\frac{C}{2} = \sqrt{2{,}45}$. Oczywiście $h(t) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$t = \frac{1500}{\sqrt{5}} \cdot \frac{C}{2} = 750 \cdot \sqrt{\frac{2{,}45}{5}} = 750 \cdot \sqrt{0{,}49} = 750 \cdot 0{,}7 = 525 \text{ s } = 8\frac{3}{4} \text{ min.}$$

Zadanie. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 4\mathrm{e}^t + 17\cos(2t) - 12\mathrm{e}^t\sin(2t)$.

Rozwiązanie: Mamy do czynienia z równaniem liniowym niejednorodnym o stałych współczynnikach. Równanie charakterystyczne to $0 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - 1)^2 + 4$. Jego pierwiastkami są więc liczby $1 \pm 2i$. Wynika stąd, że rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać $c_1\mathrm{e}^{(1+2i)t} + c_2\mathrm{e}^{(1-2i)t}$, gdzie c_1, c_2 oznaczają liczby zespolone.

Po prawej stronie występują quasiwielomiany (e^t) lub ich części rzeczywiste ($17\cos(2t)$) bądź urojone ($-12\mathrm{e}^t\sin(2t)$). Liczba 1 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc istnieje taka liczba c, że funkcja $c\mathrm{e}^t$ jest rozwiązaniem równania pomocniczego

$$x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 4\mathrm{e}^t\,.$$

By tak było musi być spełniona równość $c - 2c + 5c = 4$, czyli $c = 1$. Poszukiwanym rozwiązaniem jest funkcja e^t.

Kolej na równanie $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 17\cos(2t) = \Re\big(17\mathrm{e}^{2it}\big)$. Rozwiążemy równanie $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 17\mathrm{e}^{2it}$. Ponieważ liczba $2i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc istnieje taka liczba zespolona c, że funkcja $c\mathrm{e}^{2it}$ jest rozwiązaniem równania $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 17\mathrm{e}^{2it}$. Podstawiając $c\mathrm{e}^{2it}$ w miejsce x w tym równaniu otrzymujemy $-4c\mathrm{e}^{2it} - 4ci\mathrm{e}^{2it} + 5c\mathrm{e}^{2it} = 17\mathrm{e}^{2it}$, czyli $c(1-4i)\mathrm{e}^{2it} = 17\mathrm{e}^{2it}$. Wobec tego $c = \frac{17}{1-4i} = 1 + 4i$. Wobec tego funkcja $(1+4i)\mathrm{e}^{2it}$ jest rozwiązaniem równania $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 17\mathrm{e}^{2it}$, a ponieważ wszystkie współczynniki z lewej jego strony są liczbami rzeczywistymi, więc funkcja $\Re\big((1+4i)\mathrm{e}^{2it}\big) = \Re\big((1+4i)(\cos(2t) + i\sin(2t))\big) = \cos(2t) - 4\sin(2t)$ jest rozwiązaniem równania $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 17\cos(2t)$.

Wreszcie, rozpatrzmy równanie $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = -12\mathrm{e}^t\sin(2t) = \Im\big(-12\mathrm{e}^{(1+2i)t}\big)$. Tym razem liczba $1 + 2i$ jest pierwiastkiem jednokrotnym równania charakterystycznego, więc rozwiązaniem równania $c_1\mathrm{e}^{(1+2i)t}$ będzie quasiwielomian stopnia pierwszego z wykładnikiem $1 + 2i$, czyli funkcja postaci $(ct + d)\mathrm{e}^{(1+2i)t}$, gdzie symbole c, d oznaczają liczby zespolone. Z tego, jak wygląda rozwiązanie równania jednorodnego, jasno wynika, że nie ma żadnych ograniczeń na liczbę d (w rozwiązaniu występuje składnik $c_1\mathrm{e}^{(1+2i)t}$, więc można uznać, że $d = c_1$). Znajdziemy c. Podstawiamy do równania $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = -12\mathrm{e}^{(1+2i)t}$ funkcję $x(t) = ct\mathrm{e}^{(1+2i)t}$. Obliczamy pochodne tej funkcji, wstawiamy je do lewej strony równania i po krótkim rachunku otrzymujemy warunek $-12\mathrm{e}^{(1+2i)t} = 4ic\mathrm{e}^{(1+2i)t}$. Zatem $c = 3i$. Wobec tego, że wszystkie współczynniki po lewej stronie równania są rzeczywiste, funkcja $\Im\big(3it\mathrm{e}^{(1+2i)t}\big) = 3t\mathrm{e}^t\cos(2t)$ jest rozwiązaniem szczególnym ostatniego równania pomocniczego $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = -12\mathrm{e}^t\sin(2t)$.

Wobec tego rozwiązaniem ogólnym równania

$$x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 4\mathrm{e}^t + 17\cos(2t) - 12\mathrm{e}^t\sin(2t)$$

jest suma rozwiązań szczególnych trzech pomocniczych równań niejednorodnych oraz rozwiązania ogólnego równania jednorodnego, czyli funkcja $\mathrm{e}^t + \cos(2t) - 4\sin(2t) + 3t\mathrm{e}^t\cos(2t) + c_1\mathrm{e}^{(1+2i)t} + c_2\mathrm{e}^{(1-2i)t}$, gdzie c_1, c_2 oznaczają dowolne liczby zespolone. Można bez trudu zauważyć, że jeśli $c_2 = \overline{c_1}$, to wartości tej funkcji są rzeczywiste. Można też zapisać to samo rozwiązanie w postaci

$$\mathrm{e}^t + \cos(2t) - 4\sin(2t) + 3t\mathrm{e}^t\cos(2t) + d_1\mathrm{e}^t\cos(2t) + d_2\mathrm{e}^t\sin(2t)\,.$$

W tym przypadku rozwiązania rzeczywiste otrzymujemy dla rzeczywistych d_1, d_2.

Zadanie. Niech $f(x) = x - M - \kappa \sin(x)$, gdzie $M \in (0, 2\pi)$ oraz $\kappa \in (0,1)$. Wykaż, że można wskazać takie punkty początkowe $a, b \in [0, 2\pi]$ dla metody bisekcji, że miejsce zerowe f będzie można z jej pomocą wyznaczyć z błędem bezwzględnym nie przekraczającym 2^{-24}, obliczając przy tym nie więcej niż 32 wartości funkcji.

Rozwiązanie. Warunkiem dostatecznym zbieżności metody bisekcji startującej z pary punktów $a < b$ jest, by f była ciągła w $[a, b]$ oraz $f(a)\,f(b) < 0$. Wówczas metoda bisekcji startująca z przedziału $[a_0, b_0] = [a, b]$ generuje ciąg przedziałów $[a_n, b_n]$, zawierających miejsce zerowe f, przy czym na n-tej iteracji,

$$|b_n - a_n| \leq |b - a|/2^n$$

i konsekwentnie przybliżenie miejsca zerowego $x_n = (a_n + b_n)/2$ ma błąd nie przekraczający $|b - a|/2^{n+1}$. Stąd wynika, że dla uzyskania przybliżenia miejsca zerowego f z błędem poniżej zadanego $\epsilon \in (0, |b - a|)$ (większe wartości nie miałyby sensu) wystarczy wykonać

$$n \geq \left\lceil \log_2 \frac{|b-a|}{\epsilon} \right\rceil - 1$$

iteracji. Funkcja f podana w zadaniu jest ciągła, przy czym

$$f(0) = -M < 0 \qquad \text{oraz} \qquad f(2\pi) = 2\pi - M > 0,$$

zatem spełnia warunki zbieżności metody bisekcji dla przedziału początkowego $[a, b] = [0, 2\pi]$. Ponieważ

$$\left\lceil \log_2 \frac{2\pi}{2^{-24}} \right\rceil - 1 = 26,$$

a n iteracji metody bisekcji wymaga obliczenia $n + 2$ wartości funkcji f, to łącznie wystarczy obliczyć 28 wartości funkcji.

Zadanie. Niech $R = \mathbb{Z}[i]$. Czy $a = 2 + i$ jest elementem nierozkładalnym pierścienia R?

Rozwiązanie. Rozpatrzmy funkcję $N : R \to \mathbb{Z}$ określoną formułą $N(n + mi) := n^2 + m^2$ (jest to w istocie kwadrat modułu liczby zespolonej $n + mi$).

Łatwo sprawdzić, że dla $x, y \in R$ zachodzi równość $N(xy) = N(x)N(y)$, oraz że $x \in R$ jest elementem odwracalnym R wtedy i tylko wtedy, gdy $N(x) = 1$ (tak jest, ponieważ $\frac{1}{n+mi} = \frac{n-mi}{N(n+mi)}$).

Przypuśćmy teraz, że $a = xy$ dla pewnych $x, y \in R$. Wówczas, ponieważ $N(a) = 5$, więc $N(x) = 1$ lub $N(y) = 1$. Oznacza to, iż x lub y jest odwracalne. Wykazaliśmy więc, że a jest elementem nierozkładalnym.

Zadanie. Niech $Z_0 = \mathbb{N}$, $Z_1 = \{0\} \cup \{\frac{1}{i} : i = 1, 2, \ldots\}$. Wykazać, że podprzestrzenie $Z_0 \times Z_1$ i $Z_1 \times Z_1 \setminus \{(0,0)\}$ płaszczyzny euklidesowej są homeomorficzne.

Rozwiązanie. Przestrzeń $S = Z_0 \times Z_1$ jest sumą przeliczalnie wielu parami rozłącznych otwartych podprzestrzeni $U_n = \{n\} \times Z_1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ homeomorficznych z Z_1 (Z_1 ma topologię podprzestrzeni prostej euklidesowej).

Niech $T = Z_1 \times Z_1 \setminus \{(0,0)\}$. Dla każdego $i = 1, 2, \ldots$ zbiór $V_i = \{\frac{1}{i}\} \times Z_1$ jest otwarty w T (bo $\frac{1}{i}$ jest punktem izolowanym Z_1). Analogicznie, dla każdego $j = 1, 2, \ldots$, zbiór $H_j = Z_1 \times \{\frac{1}{j}\}$ jest otwarty w T. Zauważmy, że zbiory V_i (a także H_j) są parami rozłączne, ale $V_i \cap H_j = \{(\frac{1}{i}, \frac{1}{j})\}$.

Niech $\mathcal{W} = \{W_n : n = 0, 1, \ldots\}$ będzie rodziną tak zdefiniowanych zbiorów otwartych, ustawionych w ciąg $\mathcal{W} = \{V_1, H_1, V_2, H_2, \ldots\}$ (to znaczy $W_{2i-2} = V_i$ i $W_{2j-1} = H_j$).

Przestrzeń T jest sumą rodziny $\mathcal{W}$ otwartych podprzestrzeni T homeomorficznych z Z_1 i dla każdego n, $W_n \cap \bigcup_{m<n} W_m$ jest skończonym podzbiorem W_n złożonym z punktów izolowanych W_n. Połóżmy $W'_n = W_n \setminus \bigcup_{m<n} W_m$.

Dla każdego n zbiór W'_n jest otwarty (bo zbiory skończone są domknięte) i homeomorficzny z Z_1 (bo podprzestrzeń Z_1 uzyskana z Z_1 przez usunięcie skończenie wielu punktów izolowanych jest homeomorficzna z Z_1). Rodzina $\mathcal{W}' = \{W_n' : n = 0, 1, \dots\}$ jest więc przeliczalnym pokryciem T złożonym z parami rozłącznych otwartych podprzestrzeni T homeomorficznych z Z_1.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ustalmy homeomorfizm h_n przeprowadzający U_n na W_n'. Funkcja $h : S \to T$ zdefiniowana wzorem $h(p) = h_n(p)$ dla $p \in U_n$ jest homeomorfizmem S na T.

Uwaga: urozłącznienie rodziny $\mathcal{W}$ można również uzyskać rozkładając T na dwa (otwarte) zbiory $T = T' \cup (T \setminus T')$, gdzie $T' = T \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$ ($\mathcal{W}' = \{V_1', H_1', V_2', H_2', \dots\}$, dla $V_i' = V_i \cap T'$, $H_j' = H_j \setminus T'$).

Zadanie. Zmienna losowa X ma rozkład normalny ze średnią 5 i wariancją 4. Znajdź gęstość oraz oblicz wartość oczekiwaną zmiennej $X^3 + 2$.

Rozwiązanie. Zmienna X ma ten sam rozkład, co $5 + 2Y$, gdzie Y ma standardowy rozkład normalny. Dystrybuanta zmiennej $X^3 + 2$ jest równa:

$$F(t) = \mathbb{P}(X^3 + 2 \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt[3]{t-2}) = \mathbb{P}\Big(Y \leq \frac{1}{2}(\sqrt[3]{t-2} - 5)\Big) = \Phi\Big(\frac{1}{2}(\sqrt[3]{t-2} - 5)\Big),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Dystrybuanta ta jest ciągła i różniczkowalna poza punktem $t = 2$. Zatem zmienna $X^3 + 2$ ma gęstość, która dla $x \neq 2$ jest równa

$$g(x) = F'(x) = \Phi'\Big(\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x-2} - 5)\Big)\frac{1}{6}(x-2)^{-2/3} = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}(x-2)^{-2/3} \exp\Big(-\frac{1}{8}(\sqrt[3]{x-2} - 5)^2\Big)$$

(w punkcie $x = 2$ gęstość można określić dowolnie).

Wartość oczekiwana zmiennej $X^3 + 2$ wynosi

$$\mathbb{E}(X^3 + 2) = \mathbb{E}((5 + 2Y)^3 + 2) = 127 + 150\mathbb{E}Y + 60\mathbb{E}Y^2 + 8\mathbb{E}Y^3 = 127 + 0 + 60 + 0 = 187.$$